

龙泉中学、宜昌一中 2021 届高三年级 2 月联合考试 数 学 试 题

命题学校：龙泉中学 命题人：崔冬林 审题人：张建军

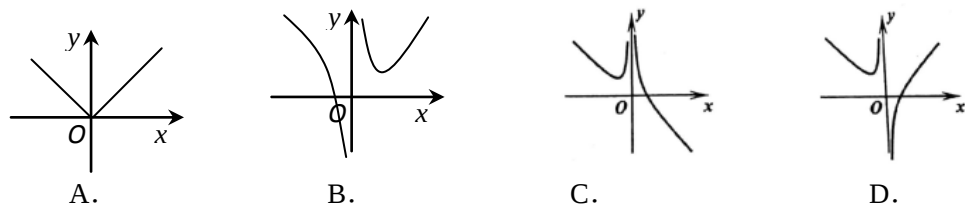
本试卷共 2 页，共 22 题。满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填在答题卡上。

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在试题卷上无效。
3. 填空题和解答题答在答题卡上每题对应的答题区域内，答在试题卷上无效。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 2^{x-1}, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{1, 2\}$
 - B. $\{2, 4\}$
 - C. $\{1, 2, 4\}$
 - D. $\emptyset$
2. 若复数 z 同时满足 $z - \bar{z} = 2i$, $\bar{z} = iz$, 则 $z =$
 - A. $1-i$
 - B. i
 - C. $-1-i$
 - D. $-1+i$
3. 关于直线 $l: ax + by + 1 = 0$, 有下列四个命题：
 - 甲：直线 l 经过点 $(1, 0)$;
 - 乙：直线 l 经过点 $(0, -1)$;
 - 丙：直线 l 经过点 $(-1, 1)$;
 - 丁： $ab < 0$.
 若只有一个假命题，则该命题是
 - A. 甲
 - B. 乙
 - C. 丙
 - D. 丁
4. 若 $\left(x - \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为 7, 则展开式的常数项为
 - A. $\frac{7}{16}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $-\frac{7}{16}$
 - D. $-\frac{1}{2}$
5. 《周髀算经》有这样一个问题：从冬至日起，依次小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种十二个节气日影长减等寸，冬至、立春、春分日影之和为三丈一尺五寸，前九个节气日影之和为八丈五尺五寸，问小满日影长为（1 丈=10 尺=100 寸）
 - A. 四尺五寸
 - B. 三尺五寸
 - C. 二尺五寸
 - D. 一尺五寸
6. 函数 $f(x) = |x| - \frac{m}{x}$ (其中 $m \in R$) 的图像不可能是



7. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心， $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\cos \angle ABC$ 的值为
 - A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 - B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
 - C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$
 - D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x} + \ln x - x$ ($a \in R$), 若 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq -2$, 则实数 a 的取值范围为

- A. $\left[\frac{2}{e^2}, +\infty\right)$
- B. $\left[\frac{1}{e^3}, +\infty\right)$
- C. $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$
- D. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = p$, $2S_n - S_{n-1} = 2p$ ($n \geq 2$, p 为常数), 则下列结论正确的有

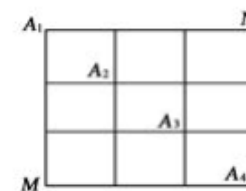
- A. $\{a_n\}$ 一定是等比数列
- B. 当 $p = 1$ 时, $S_4 = \frac{15}{8}$
- C. 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $a_m \cdot a_n = a_{m+n}$
- D. $|a_3| + |a_8| = |a_5| + |a_6|$

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} + 2\sin x - \sin 2x$, 则下列结论正确的有

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 2 个零点
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $(\pi, \sqrt{3})$ 对称
- D. 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$

11. 如图，在某城市中， M, N 两地之间有整齐的方格形道路网，其中 A_1, A_2, A_3, A_4 是道路网中位于一条对角线上的 4 个交汇点。今在道路网 M, N 处的甲、乙两人分别要到 N, M 处，他们分别随机地选择一条沿街的最短路径，以相同的速度同时出发，直到到达 N, M 处为止，则下列说法正确的有

- A. 甲从 M 到达 N 处的方法有 120 种
- B. 甲从 M 必须经过 A_3 到达 N 处的方法有 9 种
- C. 甲、乙两人在 A_3 处相遇的概率为 $\frac{9}{100}$
- D. 甲、乙两人相遇的概率为 $\frac{41}{100}$



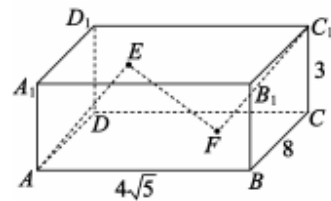
12. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点，过点 F_1 作渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的垂线交双曲线右支于点 P , 直线 PF_2 与 y 轴交于点 Q (P, Q 在 x 轴同侧), 连接 QF_1 , 若 $\triangle PQF_1$ 内切圆圆心 I 恰好落在以 F_1F_2 为直径的圆上，则下列结论正确的有

- A. $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$
- B. $\triangle PQF_1$ 内切圆的半径为 $|a-b|$
- C. $\overrightarrow{OQ} = \sqrt{5}\overrightarrow{OI}$
- D. 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知 α 是三角形的一个内角， $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) =$ _____.
14. 已知 a, b 都为正实数，则 $a + \frac{b}{a} + \frac{25}{ab}$ 的最小值为_____.
15. 已知 A, B 两点分别为椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左焦点和上顶点， C 为椭圆上的动点，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

16. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的长、宽、高分别 $4\sqrt{5}$ 、8、3， E 、 F 分别为上底面、下底面（含边界）内的动点，当 $AE+EF+FC_1$ 最小时，以 A 为球心， AE 的长为半径的球面与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线长为_____.



四、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中， a ， b ， c 分别为角 A ， B ， C 的对边， $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B + \sin A \sin C$.

- （I）求角 B 的大小；
（II）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形， $b = \sqrt{3}$ ，求 $2a - c$ 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

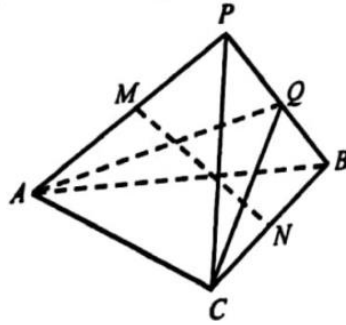
已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 4$ ， $b_1 = 2$ ， $a_2 = 2b_2 - 1$ ， $a_3 = b_3 + 2$.

- （I）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；
（II）数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中的所有项分别构成集合 A ， B ，将 $A \cup B$ 的所有元素按从小到大依次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 60 项和 S_{60} .

19.（本小题满分 12 分）

在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ， $PA = PB = AB = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}BC$.

- （I）证明： $PC \perp$ 平面 ABC ；
（II）已知 Q ， M ， N 分别为线段 PB 、 PA 、 BC 的中点，求直线 MN 与平面 QAC 所成角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

甲、乙、丙三人进行乒乓球挑战赛（其中两人比赛，另一人当裁判，每局结束时，负方在下一局当裁判），设在情况对等中各局比赛双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$ ，但每局比赛结束时，胜的一方在下一局

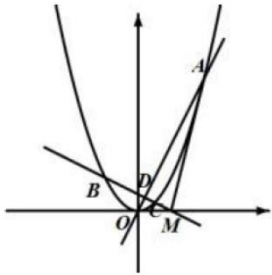
比赛时受体力影响，胜的概率均变为 $\frac{2}{5}$ ，第一局甲当裁判.

- （I）求第三局甲当裁判的概率；
（II）设 X 表示前四局乙当裁判的次数，求 X 的分布列和数学期望.

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $E: x^2 = 2y$ ，过抛物线上第一象限的点 A 作抛物线的切线，与 x 轴交于点 M . 过 M 作 OA 的垂线，交抛物线于 B ， C 两点，交 OA 于点 D .

- （I）求证：直线 BC 过定点；
（II）若 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \geq 5$ ，求 $|AD| \cdot |AO|$ 的最小值.



22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} - \ln x + 1$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

- （I）求实数 a 的取值范围；
（II）记 $f(x)$ 的极值点为 x_0 ，求证： $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2ef(x_0)$.

龙泉中学、宜昌一中 2021 届高三年级 2 月
 数学试题
 参考答案

一、单项选择题： 1-4 CDCA 5-8 BCAB

一、多项选择题： 9. BC 10. BC 11. BD 12. ABD

三、填空题 13. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ 14. $2\sqrt{10}$ 15. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 16. 2π

四. 解答题

17. 解：（I）由已知 $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B + \sin A \sin C$ ，结合正弦定理，得 $a^2 + c^2 = b^2 + ac$. 再由余弦定理，得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$ ，又 $B \in (0, \pi)$ ，则 $B = \frac{\pi}{3}$4 分

（II）由 $B = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{3}$ ，则由正弦定理，有

$$2a - c = 4\sin A - 2\sin C = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) - 2\sin C = 2\sqrt{3}\cos C. \text{7 分}$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$ ，则 $0 < \cos C < \frac{\sqrt{3}}{2}$9 分

所以 $2a - c$ 的取值范围为 $(0, 3)$10 分

18. 解：（I）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

由 $\begin{cases} 4 + d = 2 \cdot 2q - 1 \\ 4 + 2d = 2 \cdot q^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4q - 5 \\ d = q^2 - 1 \end{cases} \text{2 分}$

$\therefore q = 2, d = 3. \text{4 分}$

$\therefore a_n = 3n + 1, b_n = 2^n. \text{6 分}$

（II）当 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 6 项时，令 $3n + 1 < 2^7 = 128 \Rightarrow n < \frac{127}{3}$

此时至多有 $41 + 7 = 48$ 项（不符）7 分

当 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项时，令 $3n + 1 < 2^8 = 256 \Rightarrow n < 85$

且 $2^2, 2^4, 2^6$ 是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项，则 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{b_n\}$ 的前 7 项且含有 $\{a_n\}$ 的前 56 项，再减去公共的三项9 分

$\therefore S_{60} = \left(56 \times 4 + \frac{56 \times 55}{2} \times 3\right) + 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 4844 + 170 = 5014. \text{12 分}$

19. 解：（I）证明：取 AB 中点 D ，连接 PD, DC

$\because PA = PB, AC = BC$ ，则 $AB \perp PD, AB \perp DC$. 又 $PD \cap DC = D$ ，

$\therefore AB \perp$ 平面 PDC ，故 $AB \perp PC$2 分

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}BC$ ， $\therefore BC \perp AC$3 分

又 $\because$ 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ，且交线为 AC ， $\therefore BC \perp$ 平面 PAC ，故 $BC \perp PC$4 分

又 $AB \perp PC, AB \cap BC = B \therefore PC \perp$ 平面 ABC5 分

（II）如图建立空间直角坐标系，设 $AC = 1$ ，则 $A(0, 1, 0), B(1, 0, 0), P(0, 0, 1)$ ，

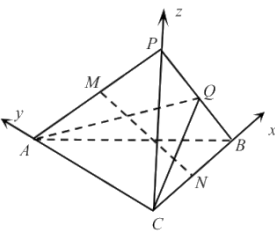
$Q\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right). \text{6 分}$

设平面 QAC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ， $\because \vec{CA} = (0, 1, 0), \vec{CQ} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ ，

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CQ} = 0 \end{cases}$ ，可得 $\vec{n} = (1, 0, -1)$ ，8 分

又 $\vec{MN} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，

$\therefore \cos\langle \vec{n}, \vec{MN} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{MN}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{MN}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{11 分}$



所以直线 MN 与平面 QAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$12 分

20. 解：（I）第三局甲当裁判则前两局有两种情形：前两场都是乙胜，前两场都是丙胜，故所求概率为 $P = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$5 分

（II）由于不能连续两局都当裁判，第一局由甲当裁判，故 X 的可能取值为 0, 1, 2,6 分

当 $X = 0$ 时，则前三局乙均胜，故 $P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{25}$,7 分

当 $X = 2$ 时，乙只能在第 2、4 局中当裁判，故乙在第一局中输掉，在第三局中也输掉，则第一局丙胜乙败；第二局无论甲丙谁胜，在第三局中甲或丙是连胜概率变为 $\frac{2}{5}$ ，

故 $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$,9 分

$P(X = 1) = 1 - \frac{2}{25} - \frac{1}{5} = \frac{18}{25}$,10 分

其分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{1}{5}$

$EX = 0 \times \frac{2}{25} + 1 \times \frac{18}{25} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{28}{25}. \text{12 分}$

21. 解：（I） $y' = x$ ，设点 $A(2t, 2t^2)(t > 0)$ ，则 $k_{AM} = y'|_{x=t} = 2t$ ，2 分

$\therefore$ 直线 AM 的方程为： $y - 2t^2 = 2t(x - 2t)$ ，即 $y = 2tx - 2t^2$ ，

$\therefore M(t, 0)$ ，又 $k_{OA} = t$ ， $\therefore k_{BC} = -\frac{1}{t}$ ，4 分

$\therefore$ 直线 BC 的方程： $y = -\frac{1}{t}(x - t) = -\frac{1}{t}x + 1$ 经过定点 $(0, 1)$5 分

（II）直线 BC 与抛物线 $x^2 = 2y$ 联立得 $x^2 + \frac{2}{t}x - 2 = 0$ ，6 分

设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{2}{t}$ ， $x_1 \cdot x_2 = -2$ ，

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (x_1 - t)(x_2 - t) + y_1 y_2 = x_1 x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2 + y_1 y_2 = 1 + t^2 \geq 5$
解得 $t \geq 2$,8 分

$\therefore |AD| = \frac{\left| \frac{1}{t} \times 2t + 2t^2 - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = \frac{|2t^2 + 1|}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot t$,9 分

$|AO| = 2\sqrt{t^2 + t^4} = 2t\sqrt{t^2 + 1}$,10 分

$\therefore |AD| \cdot |AO| = 2t^2 \frac{|2t^2 + 1|}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \sqrt{t^2 + 1} = 2t^2(2t^2 + 1) \geq 72$,

当 $t = 2$ 时, $(|AD| \cdot |AO|)_{\min} = 72$12 分

22.解: (I) 由 $f(x) = \frac{a}{x} - \ln x + 1$ 得 $f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{a+x}{x^2} \ (x > 0)$ 1 分

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{a}{x} - \ln x + 1$ 有两个不同的零点 $x_1, x_2 \therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调,
 $\therefore a < 0$,2 分

令 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < -a$, $f'(x) < 0$ 得 $x > -a$,
故 $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递增, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递减,3 分
则 $f(x)$ 的极大值为 $f(-a) = -\ln(-a) > 0$, $\therefore 0 < -a < 1 \therefore -1 < a < 0$.

$\therefore x \rightarrow 0^+$ 时 $f(x) < 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) < 0$,
 $\therefore a$ 的取值范围是 $-1 < a < 0$5 分

(II) 由 (I) 知 $f(x_0) = -\ln(-a)$, $\therefore f(x_1) = f(x_2) \therefore \frac{a}{x_1} - \ln x_1 + 1 = \frac{a}{x_2} - \ln x_2 + 1$

$\therefore a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}} = \frac{\ln \frac{1}{x_2} - \ln \frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}$6 分

令 $\frac{1}{x_1} = t_1, \frac{1}{x_2} = t_2$, 则 $a = \frac{\ln t_2 - \ln t_1}{t_1 - t_2}$, 且 $\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2}$,7 分

要证 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2ef(x_0)$, 只需证 $\frac{t_1 + t_2}{2} > e(-\ln(-a))$.

下面先证明 $\frac{t_1 + t_2}{2} > \frac{t_1 - t_2}{\ln t_1 - \ln t_2}$,8 分

这只要证明 $\ln \frac{t_1}{t_2} < \frac{2(\frac{t_1}{t_2} - 1)}{\frac{t_1}{t_2} + 1}$, 设 $0 < \frac{t_1}{t_2} = m < 1$, 所以只要证明

$\ln m - \frac{2(m-1)}{m+1} < 0$, 设 $g(m) = \ln m - \frac{2(m-1)}{m+1}$,

则 $g'(m) = \frac{1}{m} - \frac{4}{(m+1)^2} = \frac{(m-1)^2}{m(m+1)^2} \geq 0$, 所以 $g(m)$ 递增,

则 $g(m) < g(1) = 0$ 成立. 于是得到 $\frac{t_1 + t_2}{2} > \frac{t_1 - t_2}{\ln t_1 - \ln t_2} = -\frac{1}{a}$,10 分

因此只要证明 $-\frac{1}{a} \geq -e \ln(-a) \ (-1 < a < 0)$, 构造函数 $h(a) = -\frac{1}{a} + e \ln(-a)$,

则 $h'(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{e}{a} = \frac{1+ea}{a^2}$, 故 $h(a)$ 在 $(-1, -\frac{1}{e})$ 上递减, 在 $(-\frac{1}{e}, 0)$ 上递增,

则 $h(a) \geq h(-\frac{1}{e}) = 0$, 即 $-\frac{1}{a} \geq -e \ln(-a)$ 成立.12 分