

武昌区 2021 届高三年级 5 月质量检测

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cup B =$
A. $\{x \mid 0 < x < 4\}$ B. $\{x \mid 0 < x \leq 4\}$ C. $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x \mid 2 < x \leq 4\}$
2. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, 则下列向量中与 $\mathbf{a}$ 垂直的是
A. $(0, 0)$ B. $(-3, -1)$ C. $(3, 1)$ D. $(-3, 1)$
3. 复数 $\frac{4i}{1+\sqrt{3}i}$ 的虚部为
A. 1 B. -1 C. -i D. i
4. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{m+2} = 1 (m > 0)$, 则 C 的离心率的取值范围为
A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(1, 2)$ C. $(\sqrt{2}, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
5. 2020 年我国 832 个贫困县全部“摘帽”, 脱贫攻坚战取得伟大胜利. 湖北秭归是“中国脐橙之乡”, 全县脐橙综合产值年均 20 亿元, 被誉为促进农民增收的“黄金果”. 已知某品种脐橙失去的新鲜度 h 与其采摘后的时间 t (天) 满足关系式: $h = m \cdot a^t$. 若采摘后 10 天, 这种脐橙失去的新鲜度为 10%, 采摘后 20 天失去的新鲜度为 20%, 那么采摘下来的这种脐橙在多长时间后失去 50% 的新鲜度 (已知 $\lg 2 \approx 0.3$, 结果四舍五入取整数)
A. 23 天 B. 33 天 C. 43 天 D. 50 天
6. 某班有 60 名学生参加某次模拟考试, 其中数学成绩 ξ 近似服从正态分布 $N(110, \sigma^2)$, 若 $P(100 \leq \xi \leq 110) = 0.35$, 则估计该班学生数学成绩在 120 分以上的人数为
A. 10 B. 9 C. 8 D. 7
7. $(x + \frac{1}{x^2} - 1)^4$ 展开式中的常数项为
A. -11 B. -7 C. 8 D. 11
8. 桌面上有 3 个半径为 2021 的球两两相外切, 在其下方空隙中放入一个球, 该球与桌面和三个

球均相切，则该球的半径是

- A. $\frac{2021}{4}$ B. $\frac{2021}{3}$ C. $\frac{2021}{2}$ D. 2021

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某学校为了促进学生德、智、体、美、劳全面发展，制订了一套量化评价标准。下表是该校甲、乙两个班级在某次活动中的德、智、体、美、劳的评价得分（得分越高，说明该项教育越好）。下列说法正确的是

- A. 甲班五项得分的极差为 1.5
B. 甲班五项得分的平均数高于乙班五项得分的平均数
C. 甲班五项得分的中位数大于乙班五项得分的中位数
D. 甲班五项得分的方差小于乙班五项得分的方差

	德	智	体	美	劳
甲班	9.5	9.5	9	9.5	8
乙班	9.5	9	9.5	9	8.5

10. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ ，则实数 ω 的值可能取

- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 2

11. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点。设 P 是准线上的动点，过点 P 作抛物线 C 的两条切线，切点分别为 A, B ，线段 AB 的中点为 M ，则

- A. $|AB|$ 的最小值为 4 B. 直线 AB 过点 F
C. $PM \perp y$ 轴 D. 线段 AB 的中垂线过定点

12. 已知实数 x, y, z 满足 $x + y + 2z = 1$ ，且 $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 = 1$ ，则下列结论正确的是

- A. x 的最小值为 $-\frac{4}{5}$ B. z 的最大值为 $\frac{1}{2}$
C. z 的最小值为 $-\frac{1}{5}$ D. xyz 取最小值时 $z = \frac{16}{27}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

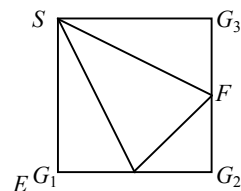
13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n + a_n = 4$ ，则 $S_4 =$ _____.

14. 抛掷 3 个骰子，事件 A 为“三个骰子向上的点数互不相同”，事件 B 为“其中恰好有一个骰子向上的点数为 2”，则 $P(A|B) =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = ax - x \sin x - 2 \cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有两个极值点，则实数 a 的取值范围是_____.

16. 如图，在边长为 2 的正方形 $SG_1G_2G_3$ 中， E, F 分别是 G_1G_2, G_2G_3 的中点。若沿 SE, SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1, G_2, G_3 三点重合，重合后的点记为 G ，则：(1)

三棱锥 $S-EFG$ 外接球的表面积为_____；(2) 点 G 到平面 SEF 的距离为_____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 \in (0, 2)$ ， $a_n^2 + 3a_n + 2 = 6S_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

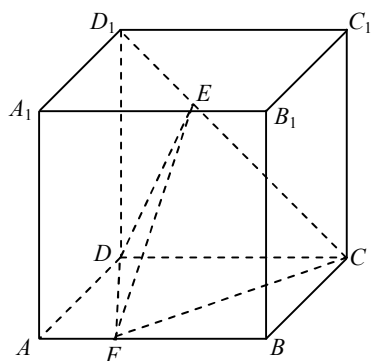
在① $\cos B = -\frac{3}{5}$ ；② $b + c = 2\sqrt{3}$ ；③ $a = \sqrt{6}$ ，这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，使问题中的三角形存在，并求出 $\triangle ABC$ 的面积.

问题：在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 是角 A, B, C 所对的边，已知 $a \sin C = \sqrt{3}c \cdot \cos A$ ，补充的条件是_____和_____.

19. (12 分)

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 在线段 CD_1 上， $CE=2ED_1$ ，点 F 为线段 AB 上的动点， $AF=\lambda FB$ ，且 $EF\parallel$ 平面 ADD_1A_1 .

- (1) 求 λ 的值；
- (2) 求二面角 $E-DF-C$ 的余弦值.



20. (12 分)

某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额商品后即可抽奖，每次抽奖都从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中，各随机摸出 1 个球，在摸出的 2 个球中，若都是红球，则获一等奖；若只有 1 个红球，则获二等奖；若没有红球，则不获奖.

- (1) 求顾客抽奖 1 次能获奖的概率；
- (2) 若某顾客有 3 次抽奖机会，记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 X ，求 X 的分布列和数学期望.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 焦距为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 A, B 为椭圆 C 上两点, O 为坐标原点, $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{1}{2}$. 点 D 在线段 AB 上, 且 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$,

连接 OD 并延长交椭圆 C 于 E , 试问 $\frac{|OE|}{|OD|}$ 是否为定值? 若是定值, 求出定值; 若不是定值, 请说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = xe^x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处的切线方程;

(2) 已知关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有两个实根 x_1, x_2 , 当 $-\frac{1}{e} < a < -\frac{2}{e^2}$ 时, 求证:

$$|x_1 - x_2| < (e^2 + 1)a + 4.$$