

2021 届高中毕业生五月供题

数 学 试 卷

2021. 5.

本试题卷共 6 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x < 8\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 2\}$, $\complement_U (A \cup B) = \{5, 6\}$, $B \cap (\complement_U A) = \{4, 7\}$, 则 A 集合为
A. $\{1, 2, 4\}$ B. $\{1, 2, 7\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 4, 7\}$
2. 若复数 z 满足 $\frac{i+z}{z} = i+2$, 则 z 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 若 $f(2a-1) - 1 \leq 0$, 则实数 a 的取值范围是
A. $[\frac{e+1}{2}, \infty)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, \frac{e+1}{2}]$
C. $[0, \frac{e+1}{2}]$ D. $(-\infty, \frac{e+1}{2}]$

数学试卷 第 1 页 (共 6 页)

4. $\triangle ABC$ 中, $\vec{AC} = 2\vec{AD}$, $\vec{BC} = 3\vec{BE}$, 设 $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\vec{DE} =$

- A. $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b}$ B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}\mathbf{b}$ C. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{6}\mathbf{b}$ D. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b}$

5. 地震震级根据地震仪记录的地震波振幅来测定, 一般采用里氏震级标准. 震级 M 用距震中 100 千米处的标准地震仪所记录的地震波最大振幅值的对数来表示. 里氏震级的计算公式为: $M = \lg \frac{A_{\max}}{A_0}$ (其中常数 A_0 是距震中 100 公里处接收到的 0 级地震的地震波的最大振幅; $A_{\max}$ 是指我们关注的这次地震在距震中 100 公里处接收到的地震波的最大振幅). 地震的能量 E 是指当地震发生时, 以地震波的形式放出的能量. $E = 10^{4.8} \times 10^{1.5M}$ (单位: 焦耳), 其中 M 为地震震级. 已知甲地地震产生的能量是乙地地震产生的能量的 10^3 倍, 若乙地地震在距震中 100 公里处接收到的地震波的最大振幅为 A , 则甲地地震在距震中 100 公里处接收到的地震波的最大振幅为

- A. $2A$ B. $10A$ C. $100A$ D. $1000A$

6. A 同学和 B 同学参加某市青少年围棋比赛并进入决赛, 决赛采取“3 局 2 胜”制, 若 A 同学每局获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且每局比赛相互独立, 则在 A 先胜一局的条件下, A 最终能获胜的概率是

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{5}{6}$

7. 过抛物线 $x^2 = 4y$ 焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 交 x 轴于 C 点, $\vec{BF} = 2\vec{CB}$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} =$

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 3 D. $\frac{10}{3}$

8. 在研究某高中高三年级学生的性别与是否喜欢某学科的关系时, 总共调查了 N 个学生 ($N = 100m, m \in \mathbb{N}^*$), 其中男女学生各半, 男生中 60% 表示喜欢该学科, 其余表示不喜欢; 女生中 40% 表示喜欢该学科, 其余表示不喜欢. 若有 99.9% 把握认为性别与是否喜欢该学科有关, 则可以推测 N 的最小值为

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

- A. 400 B. 300 C. 200 D. 100

数学试卷 第 2 页 (共 6 页)

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = n^2 + an + 1$, 则

- A. $\{a_n\}$ 是等差数列
- B. $\{a_n\}$ 不是等差数列
- C. 若 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 a 的取值范围是 $[-2, +\infty)$
- D. 若 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 a 的取值范围是 $(-3, +\infty)$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$, 则

- A. 函数 $y = |f(x)|$ 的最小正周期为 π
- B. 直线 $x = \frac{5}{8}\pi$ 是 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴
- C. $y = f(x) + f(2x - \frac{\pi}{8})$ 的值域为 $[-\frac{9}{8}, 2]$
- D. 若 $\omega > 0$ 时, $f(\omega x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调, 则 ω 的取值范围是 $(0, \frac{1}{8}]$

11. 已知偶函数 $f(x)$ 满足: $f(2+x) = f(2-x)$, 且当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 2^x - 2$, 则下列说法正确的是

- A. $-2 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
- B. 点 $(1, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心
- C. $f(x)$ 在区间 $[-10, 10]$ 上有10个零点
- D. 对任意 x_1, x_2 , 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2$

12. A, B, C, D 是半径已知的某球体表面上不共面的四点, 且 AB 恰为该球体的一条直径, 现已知 AC 和 CD 的长, 在一般情况下, 若再加入一个条件就能使四面体 $ABCD$ 的体积有唯一值, 则该条件可以是

- A. $CD \perp AB$
- B. BD 的长
- C. 二面角 $C-AB-D$ 的大小
- D. 直线 CD 与平面 ABC 所成角的大小

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 某圆柱两个底面面积之和等于其侧面面积, 则该圆柱底面半径与高的比值为_____.

14. 当 $x \neq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 满足 $x < f(x) < e^x - 1$, 写出一个满足条件的函数解析式 $f(x) =$ _____.

15. $(1 + x + \frac{1}{x})^{10}$ 展开式的项数为_____.

16. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 若存在以点 $T(t, 0)$ 为圆心, $r (r > 0)$ 为半径的 $\odot T$, 该圆与椭圆 E 恰有两个公共点, 且圆上其余各点均在椭圆内部, 则 t 的取值范围是_____.

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

在① $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{15}{2}$; ② $\sqrt{3}\sin C + \cos C = \frac{a+c}{b}$; ③面积 $S = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并回答问题.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , A 为锐角, $a = 6, b = 4\sqrt{3}\sin B$, 且_____ , 求 $\triangle ABC$ 的周长.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12分)

等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_2 + a_3 = 6$.

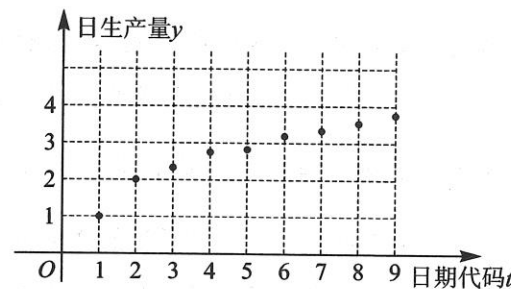
(1) 求 a_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{2^n}{(|a_n| + 1)(|a_{n+1}| + 1)}$, 且 $b_4 < 1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12 分)

2021 年,我国新型冠状病毒肺炎疫情已经得到初步控制,抗疫工作取得阶段性胜利.

某市号召市民接种疫苗,提出全民“应种尽种”的口号,疫苗成了重要的防疫物资.某疫苗生产厂不断加大投入,高速生产,现对其某月内连续 9 天的日生产量 y_i (单位:十万支, $i=1,2,\dots,9$) 数据作了初步统计,得到如图所示的散点图及一些统计量的数值:



$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\sum_{i=1}^9 t_i y_i$	$\sum_{i=1}^9 t_i z_i$
2.72	19	139.09	1095

注:图中日期代码 1~9 分别对应这连续 9 天的时间;表中 $z_i = e^{y_i}$, $i=1,2,\dots,9$,

$$\bar{z} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i.$$

(1) 从这 9 天中随机选取 3 天,求这 3 天中恰有 2 天的日生产量不高于三十万支的概率;

(2) 由散点图分析,样本点都集中在曲线 $y = \ln(bt + a)$ 的附近,求 y 关于 t 的方程 $y = \ln(bt + a)$,并估计该厂从什么时候开始日生产量超过四十万支.

参考公式:回归方程 $\hat{v} = \hat{b}u + \hat{a}$ 中,斜率和截距的最小二乘估计公式为:

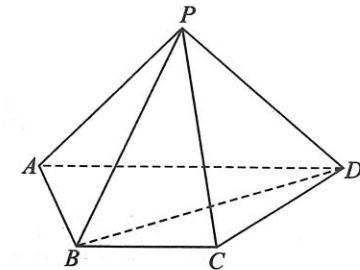
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}, \hat{a} = \bar{v} - \hat{b}\bar{u}. \text{ 参考数据: } e^4 \approx 54.6.$$

20. (12 分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD=2$, $AB=BC=CD=1$, $AD \parallel BC$,且 $PA=PC$, $PB=PD$.

(1) 证明:平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求直线 PA 与平面 PBD 所成角的正弦值的最大值.



21. (12 分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线所成的锐角为 60° ,且点 $P(2,3)$

为 E 上一点.

(1) 求 E 的标准方程;

(2) 设 M 为 E 在第一象限的任一点,过 M 的直线与 E 恰有一个公共点,且分别与 E 的两条渐近线交于点 A, B ,设 O 为坐标原点,证明: $\triangle AOB$ 面积为定值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x - a)^2 + 2\sin x - \frac{7}{4}$.

(1) 证明: $f(x)$ 有唯一极值点;

(2) 讨论 $f(x)$ 的零点个数.