2020年夏“武汉襄阳荆门宜昌四地六校考试联盟”

高三起点联考

数学试题

命题学校：襄阳五中　命题人：万小刚　审题人：李冲

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．复数z_1在复平面内对应的点为（1，3），$z_2=-2+i$（i为虚数单位），则复数$\frac{z_1}{z_2}$的虚部为（）

A．$\frac{7}{5}$　B．$-\frac{7}{5}$　C．$\frac{7}{5}i$　D．$-\frac{7}{5}i$

2．设$x\in$R，则“$x>2$”是“$x^2>4$”的（）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

3.《周髀算经》是我国古老的天文学和数学著作，其书中记载：一年有二十四个节气，每个节气晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测影子的长度），夏至、小暑、大暑、立秋、处暑、白露、秋分、寒露、霜降是连续的九个节气，其晷长依次成等差数列，经记录测算，这九个节气的所有晷长之和为49.5尺，夏至、大暑、处暑三个节气晷长之和为10.5尺，则立秋的晷长为（）

A.1.5尺　B.2.5尺　C.3.5尺　D.4.5尺

4．若正数x，y满足$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5$，则$3x+4y$的最小值是（）

A．$\frac{24}{5}$　B．$\frac{28}{5}$　C．5　D．25

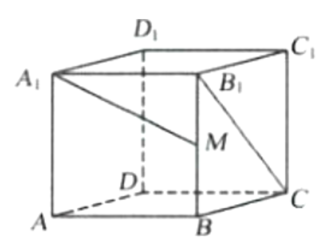
5.已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减，$f(-3)=0$，则不等式$f(x-1)>0$的解集为（）

A.$(-3,3)$　B.$(-\infty,-2)\cup(1,4)$

C.$(-\infty,-4)\cup(-1,2)$　D.$(-\infty,-3)\cup(0,3)$

6．已知两点$A(1,2)$，$B(3,6)$，动点M在直线$y=x$上运动，则$|MA|+|MB|$的最小值为（）

A．$2\sqrt{5}$　B．$\sqrt{26}$　C．4　D．5



7．如图，直四棱柱$ABCD—A_1B_1C_1D_1$的底面是菱形，$AA_1=AB=2$，$\angle BAD=60°$，M是BB_1的中点，则异面直线A_1M与B_1C所成角的余弦值为

A．$-\frac{\sqrt{10}}{5}$　B．$-\frac{1}{5}$　C．$\frac{1}{5}$　D．$\frac{\sqrt{10}}{5}$

8．已知某7个数据的平均数为5，方差为4，现又加入一个新数据5，此时这8个数的方差s^2为（）

A．$\frac{5}{2}$　B．3　C．$\frac{7}{2}$　D．4

9．$(2x+y+1)^6$的展开式中，xy^3的系数为（）

A.120　B.480　C.240　D.320

10．已知圆O：$x^2+y^2=1$上恰有两个点到直线l：$y=kx+1$的距离为$\frac{1}{2}$，则直线l的倾斜角的取值范围为（）

A．$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$　B．$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

C．$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$　D．$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

11.已知水平直线上的某质点，每次等可能的向左或向右移动一个单位，则在第6次移动后，该质点恰好回到初始位置的概率是（）

A．$\frac{1}{4}$　B．$\frac{5}{16}$　C．$\frac{3}{8}$　D．$\frac{1}{2}$

12．若函数$f(x)=(2x^2-mx+4)e^x$在区间[2,3]上不是单调函数，则实数m的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{20}{3},\frac{17}{2}\right]$　B．$\left(\frac{20}{3},\frac{17}{2}\right)$　C．$\left[5,\ \frac{20}{3}\right]$　D．$\left(5,\frac{20}{3}\right)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知向量$\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(-1,k)$，若$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，则$k$的值为__________.

14．2018年5月至2019年春，在阿拉伯半岛和伊朗西南部，沙漠蝗虫迅速繁衍，呈现几何式的爆发，仅仅几个月，蝗虫数量增长了8000倍，引发了蝗灾，到2020年春季蝗灾已波及印度和巴基斯坦，假设蝗虫的日增长率为5%，最初有N_0只．则至少经过___天才能达到最初的16000倍（结果需为整数，参考数据：ln1.05≈0.0488，ln1.5≈0．4055，ln1600≈7.3778，ln16000≈9.6803）.

15.双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，过$F_1$且斜率为$\sqrt{3}$的直线与双曲线的左、右两支分别交于点$A$、$B$（$B$在右侧），若$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BF_2})\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，则$C$的离心率为__________.

16．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$a_{n+1}=3a_n+(-1)^n$，则数列$\{a_n\}$的前2021项和为______.

三、解答题：共70分。解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分10分）已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，$a_3=7$，且a_2，a_4，a_9成等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

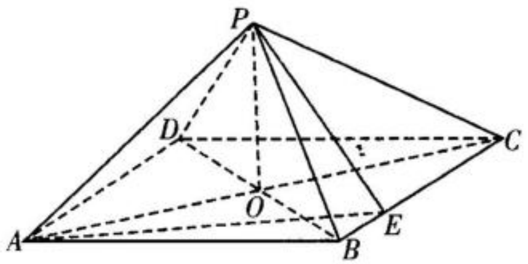
(2)设$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

18.（本小题满分12分）已知函数$f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(A>0,\omega>0)$只能同时满足下列三个条件中的两个：①函数$f(x)$的最大值为2；②函数$f(x)$的图象可由$y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象平移得到；③函数$f(x)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

（1）请写出这两个条件序号，并求出$f(x)$的解析式；

（2）求方程$f(x)+1=0$在区间$[-\pi,\pi]$上所有解的和.

19.（本小题满分 12 分）
如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形，$PA=PC$，$BD\perp PA$，E 是 BC 上一点，且 $EC=3BE$，设 $AC\bigcap BD=O$.



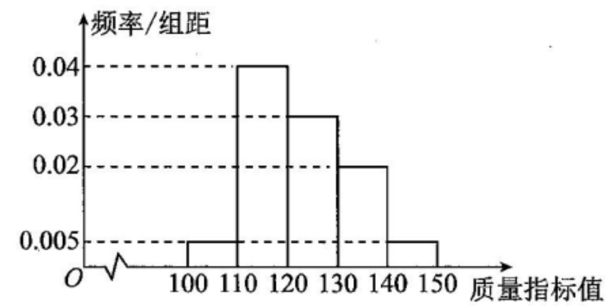
（1）证明：$PO\perp$ 平面 $ABCD$；
（2）若 $\angle BAD=60°$，$PA\perp PE$，求二面角 $A-PE-C$ 的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，以原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $\sqrt{7}x-\sqrt{5}y+12=0$ 相切.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 A(-4,0)，过点 R(3,0) 作与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 C 于 P，Q 两点，连接 AP，AQ 分别交直线 $x=\dfrac{16}{3}$ 于 M，N 两点，若直线 MR、NR 的斜率分别为 k_1、k_2，试问：k_1k_2 是否为定值？若是，求出该定值，若不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）
在全球抗击新冠肺炎疫情期间，我国医疗物资生产企业加班加点生产口罩．防护服、消毒水等防疫物品，保障抗疫一线医疗物资供应，在国际社会上赢得一片赞誉．我国某口罩生产厂商在加大生产的同时，狠抓质量管理，不定时抽查口罩质量，该厂质检人员从某日所生产的口罩中随机抽取了 100 个，将其质量指标值分成以下五组：$[100,110)$，$[110,120)$，$[120,130)$，$[130,140)$，$[140,150]$，得到如下频率分布直方图.



（1）规定：口罩的质量指标值越高，说明该口罩质量越好，其中质量指标值低于 130 的为二级口罩，质量指标值不低于 130 的为一级口罩．现从样本口罩中利用分层抽样的方法随机抽取 8 个口罩，再从中抽取 3 个，记其中一级口罩个数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（2）在 2020 年“五一”劳动节前，甲计划在该型号口罩的某网络购物平台上参加 A 店一个订单“秒杀”抢购，同时乙计划在该型号口罩的某网络购物平台上参加 B 店一个订单“秒杀”抢购，其中每个订单均由 $n\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$ 个该型号口罩构成．假定甲、乙两人在 A，B 两店订单“秒杀”成功的概率均为 $\frac{1}{(n+2)^2}$，记甲，乙两人抢购成功的订单总数量、口罩总数量分别为 X，Y，

①求 X 的分布列及数学期望 $E\left(X\right)$；

②当 Y 的数学期望 $E\left(Y\right)$ 取最大值时正整数 n 的值.

22.（本小题满分 12 分）
设 $f\left(x\right)=x\sin x+\cos x,g\left(x\right)=x^2+4$

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的单调性。

(2)令 $h\left(x\right)=g\left(x\right)-4f\left(x\right)$，试证明 $h\left(x\right)$ 在 R 上有且仅有三个零点

2020 年夏“武汉襄阳荆门宜昌四地六校考试联盟”参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	C	B	B	D	C	A	B	B	B

13、-3　　14、199　　15. $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$　　16. $\frac{3^{2022}-1}{8}$

17、解：（1）设$\{a_n\}$的公差为d，

因为a_2，a_4，a_9成等比数列$\therefore a_4^{\ 2}=a_2a_9$，可得$(a+3d)^2=(a_1+d)(a_1+8d)$，

$\therefore d^2=3a_1d$，$\because d\neq 0$，所以$d=3a_1$，又$\because a_3=a_1+2d=7$

解得$a_1=1$，$d=3$，$\therefore a_n=3n-2$　　………………………5 分

（2）$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1})$

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7})+\cdots\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1})$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3n+1})=\dfrac{n}{3n+1}$　　………………………10 分

18、（1）函数$f(x)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$满足的条件为①③；

理由如下：由题意可知条件①②互相矛盾，

故③为函数$f(x)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$满足的条件之一，由③可知，$T=\pi$，所以$\omega=2$，故②不合题意，

所以函数$f(x)=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$满足的条件为①③；

由①可知$A=2$，所以$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；………………………6 分

（2）因为$f(x)+1=0$，所以$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

所以$2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$或$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以$x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$或$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，………………………9 分

又因为$x\in[-\pi,\pi]$，所以x的取值为$-\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$，$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$，

所以方程$f(x)+1=0$在区间$[-\pi,\pi]$上所有的解的和为$\dfrac{2\pi}{3}$………………………12 分

19、（1）证明：$\because$四边形$ABCD$是菱形，$\therefore O$是AC的中点，$BD\perp AC$.

$\because BD\perp PA$，$PA\cap AC=A$，$\therefore BD\perp$平面PAC.

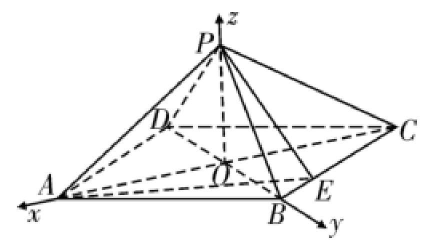
$\because PO\subset$平面PAC，$\therefore BD\perp PO$.$\because PA=PC$，O是AC的中点，$\therefore PO\perp AC$.

$\because AC\subset$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，$AC\cap BD=O$，

$\therefore PO\perp$平面$ABCD$………………………5 分

（2）解：由（1）知$PO\perp$平面$ABCD$，$BD\perp AC$，$\therefore OA$，OB，OP两两互相垂直.

$\therefore$以O为原点，以OA，OB，OP所在直线分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系如图所示.



设$PO=a$，

$\because$四边形$ABCD$是菱形，$\angle BAD=60°$，$\therefore\triangle ABD$和$\triangle BCD$都是等边三角形.$\therefore OA=OC=2\sqrt{3}$.

$\therefore P(0,0,a)$，$A(2\sqrt{3},0,0)$，$C(-2\sqrt{3},0,0)$，$E\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$.

$\therefore\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},0,-a)$，$\overrightarrow{PE}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},-a\right)$，$\overrightarrow{EC}=\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0\right)$

$\because PA\perp PE$，$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PE}=(2\sqrt{3},0,-a)\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},-a\right)=0$ $\therefore -3+a^2=0$.

即$a=\sqrt{3}$………………………7 分$\therefore\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},-\sqrt{3}\right)$

设平面PAE的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\vec{m}=(2\sqrt{3},0,-\sqrt{3})\cdot(x_1,y_1,z_1)=2\sqrt{3}x_1-\sqrt{3}z_1=0\\ \overrightarrow{PE}\cdot\vec{m}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},-\sqrt{3}\right)\cdot(x_1,y_1,z_1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+\dfrac{3}{2}y_1-\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$

令$z_1=2$，得$x_1=1$，$y_1=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\vec{m}=\left(1,\dfrac{5\sqrt{3}}{3},2\right)$………………………9 分

设平面PEC的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x_2-\dfrac{3}{2}y_2=0\\ \overrightarrow{PE}\cdot\vec{n}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2+\dfrac{3}{2}y_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$

令$x_2=-1$，得$y_2=\sqrt{3}$，$z_2=2$.$\therefore\vec{n}=(-1,\sqrt{3},2)$　　………………………11 分

设二面角$A-PE-C$的平面角为θ，结合图象可知，

$$\cos\theta=-\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=-\left|\frac{\left(1,\frac{5\sqrt{3}}{3},2\right)\cdot\left(-1,\sqrt{3},2\right)}{\sqrt{1^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}}\right|=-\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$\therefore$二面角 $A-PE-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$……………………….12 分

20、（1）由题意得 $\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ \frac{12}{\sqrt{7}+5}=b,\\ a^2+b^2=c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4\\ b=2\sqrt{3}\\ c=2\end{cases}$,故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$………………4 分

（2）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 PQ 的方程为 $x=my+3$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\\ x=my+3\end{cases}$

得 $(3m^2+4)y^2+18my-21=0$．$\therefore y_1+y_2=\frac{-18m}{3m^2+4}, y_1y_2=\frac{-21}{3m^2+4}$, ……6 分

由 A,P,M，三点共线可知，$\frac{y_M}{\frac{16}{3}+4}=\frac{y_1}{x_1+4}$，所以 $y_M=\frac{28}{3}\cdot\frac{y_1}{x_1+4}$；

同理可得 $y_N=\frac{28}{3}\cdot\frac{y_2}{x_2+4}$ ……………………………………….8 分

所以 $k_1k_2=\frac{y_M}{\frac{16}{3}-3}\times\frac{y_N}{\frac{16}{3}-3}=\frac{9y_My_N}{49}=\frac{16y_1y_2}{(x_1+4)(x_2+4)}$．

因为 $(x_1+4)(x_2+4)=(my_1+7)(my_2+7)=m^2y_1y_2+7m(y_1+y_2)+49$，………10 分

所以 $k_1k_2=\frac{16y_1y_2}{m^2y_1y_2+7m(y_1+y_2)+49}=\frac{16\times\frac{-21}{3m^2+4}}{m^2\times\frac{-21}{3m^2+4}+7m\times\frac{-18m}{3m^2+4}+49}=-\frac{12}{7}$ …12 分

21、解：(1) 按分层抽样抽取 8 个口罩，则其中二级、一级口罩个数分别为 6，2．
故 X 的可能取值为 0，1，2．

$P(X=0)=\frac{C_6^3\cdot C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2\cdot C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_6^1\cdot C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$，$X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

所以 $E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$． ……………………….4 分

（2）①由题知，X 的可能取值为 0，1，2，

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=(1-\frac{1}{(n+2)^2})^2$ $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=2\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)\cdot\frac{1}{(n+2)^2}$ $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{1}{(n+2)^4}$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$(1-\frac{1}{(n+2)^2})^2$	$2\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)\cdot\frac{1}{(n+2)^2}$	$\frac{1}{(n+2)^4}$

所以 $\mathrm{E(X)}=\frac{2}{(n+2)^2}$ ……………………….8 分

②因为 $Y=nX$，所以 $\mathrm{E(Y)}=n\mathrm{E(X)}=\frac{2n}{(n+2)^2}=\frac{2}{n+\frac{4}{n}+4}\le\frac{1}{4}$当且仅当 $n=2$ 时取等号

所以 $E(Y)$ 取最大值时，n 的值为 2．……………………….12 分

22、 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$ …1 分令 $f'(x)=0$,则$x=0$,或$x=\pm\frac{\pi}{2}$ ………2 分

$x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减……4 分

（2）$h(x)=x^2+4-4x\sin x-4\cos x$，$h(0)=0$，$\therefore x=0$是$h(x)$的一个零点……………5 分

$h(-x)=(-x)^2+4-4(-x)\sin(-x)-4\cos(-x)=x^2+4-4x\sin x-4\cos x=h(x)$

$\therefore h(x)$是偶函数,………6 分$\therefore$要确定$h(x)$在R上的零点个数

只需确定$x>0$时，$h(x)$的零点个数即可

① 当$x>0$时，$h'(x)=2x-4x\cos x=2x(1-2\cos x)$

令$h'(x)=0$,即$\cos x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$或$-\frac{\pi}{3}+2k\pi$（$k\in N$）…………………7 分

$x\in(0,\frac{\pi}{3})$时，$h'(x)<0, h(x)$单调递减，$h(\frac{\pi}{3})<0$

$x\in(\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi)$时，$h'(x)>0, h(x)$单调递增，$h(\frac{5}{3}\pi)=\frac{25}{9}\pi^2+\frac{10\sqrt{3}}{3}\pi+2>0$

$\therefore h(x)$在$(0,\frac{5}{3}\pi)$有唯一零点。……………………………………………….9 分

②当$x\ge\frac{5}{3}\pi$时，由于$\sin x\le 1,\cos\le 1$ $h(x)=x^2+4-4x\sin x-4\cos x$

$\ge x^2+4-4x-4=x^2-4x=t(x)$ 而$t(x)$在$(\frac{5}{3}\pi,+\infty)$单调递增，$t(x)\ge t(\frac{5}{3}\pi)>0$

$\therefore h(x)>0$恒成立，故$h(x)$在$(\frac{5}{3}\pi,+\infty)$无零点……………………………….11 分

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$有一个零点由于$h(x)$是偶函数,$\therefore h(x)$在$(-\infty,0)$有一个零点，而$h(0)=0$

$\therefore h(x)$在R上有且仅有3个零点。……………………………………………12 分