

2021 年湖北省八市高三(3 月)联考

数 学 试 卷

2021.3

本试题卷共 6 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $zi^{2021} = 2 - i$, 则 $z =$

- A. $-1 + 2i$ B. $-1 - 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$

2. 已知 M, N 均为 $\mathbf{R}$ 的子集, 且 $M \subseteq \complement_{\mathbf{R}} N$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} M \cap N =$

- A. $\emptyset$ B. M C. N D. $\mathbf{R}$

3. 设 $a = 3^{0.3}$, $b = \log_{0.3} 0.4$, $c = \log_3 0.3$, 则 a, b, c 的大小是

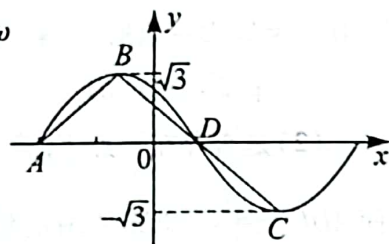
- A. $a > b > c$ B. $b < c < a$ C. $b > a > c$ D. $a < b < c$

4. 1943 年 19 岁的曹火量在平西根据地进行抗日宣传工作,他以切身经历创作了歌曲《没有共产党就没有中国》,后毛泽东主席将歌曲改名为《没有共产党就没有新中国》. 2021 年是中国共产党建党 100 周年. 仅从逻辑学角度来看,“没有共产党就没有新中国”这句话中体现了“有共产党”是“有新中国”的

- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



5. 已知函数 $g(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi)$, $g(x)$ 图像上每一点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $f(x)$ 的图像, $f(x)$ 的部分图像如图所示, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|^2$, 则 ω 等于

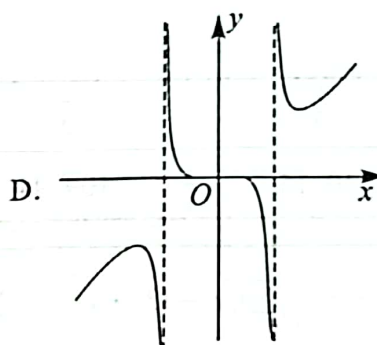
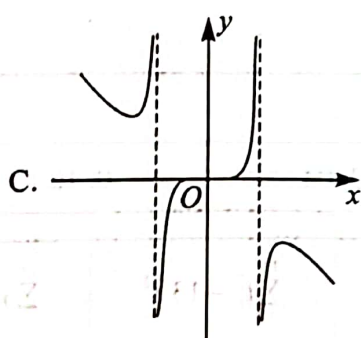
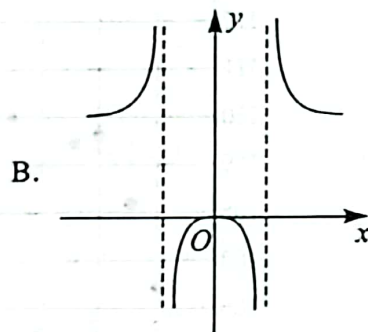
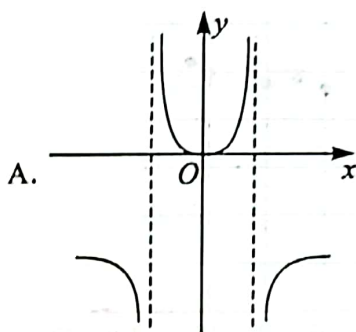


- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

6. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA = SB = SC$, $AB \perp BC$, O 为 AC 中点, $OS = OC = 1$, 则三棱锥 $S-ABC$ 体积最大值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{x - \sin x}{\ln|x|}, & x \neq 0. \end{cases}$ 的部分图像大致为



8. 设实数 $t > 0$, 若不等式 $e^{2x} - \frac{\ln 2 + \ln x}{t} \geq 0$ 对 $x > 0$ 恒成立, 则 t 的取值范围为

- A. $[\frac{1}{2e}, +\infty)$ B. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{e}]$ D. $(0, \frac{1}{2e}]$



二、多选题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有错选的得0分.)

1. 下列说法正确的是

- A. 已知直线 $l \perp$ 平面 α , 直线 $m \parallel$ 平面 β , 则“ $\alpha \parallel \beta$ ”是“ $l \perp m$ ”的必要不充分条件.
- B. 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq 4) = 0.79$, 则 $P(\xi \leq -2) = 0.21$.
- C. 若随机变量 ξ 服从二项分布: $\xi \sim B(4, \frac{1}{4})$, 则 $E(2\xi + 3) = 5$.
- D. 甲、乙、丙、丁4个人到4个景点旅游, 每人只去一个景点. 设事件 M 为“4个人去的景点各不相同”, 事件 N 为“甲不去其中的A景点”, 则 $P(MN) = \frac{2}{9}$.

2. $\triangle ABC$ 中, D 为边 AC 上的一点, 且满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, 若 P 为边 BD 上的一点, 且满足 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m > 0, n > 0$), 则下列结论正确的是

- A. $m + 2n = 1$
- B. mn 的最大值为 $\frac{1}{12}$
- C. $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 $6 + 4\sqrt{2}$
- D. $m^2 + 9n^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

3. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $b - 2a + 4a\sin^2 \frac{A+B}{2} = 0$, 则下列结论正确的是

- A. 角 C 一定为锐角
- B. $a^2 + 2b^2 - c^2 = 0$
- C. $3\tan A + \tan C = 0$
- D. $\tan B$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 意大利画家列奥纳多·达·芬奇(1452.4—1519.5)的画作《抱银貂的女人》中, 女士脖颈上黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽, 达·芬奇提出: 固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 项链所形成的曲线是什么? 这就是著名的“悬链线问题”, 后人给出了悬链线的函数解析式: $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$, 其中 a 为悬链线系数,

$\cosh x$ 称为双曲余弦函数, 其函数表达式为 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 相应地双曲正弦函数的表达式为 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

若直线 $x = m$ 与双曲余弦函数 C_1 与双曲正弦函数 C_2 的图象分别相交于点 A, B , 曲线 C_1 在点 A 处的切线 l_1 与曲线 C_2 在点 B 处的切线 l_2 相交于点 P , 则下列结论正确的为

- A. $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$
- B. $y = \sinh x \cosh x$ 是偶函数
- C. $(\cosh x)' = \sinh x$
- D. 若 $\triangle PAB$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形, 则实数 $m = 0$



三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 已知函数 $f(x) = 2\sin\alpha + \log_2 \frac{3+x}{3-x}$, $f(m) = 3$, $f(-m) = 1$, 则 $m =$ _____.
14. 抛物线 $C: x^2 = 2py$, 其焦点到准线 l 的距离为 4, 则准线 l 被圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 截得的弦长为 _____.
15. 遗爱湖国家湿地公园是黄冈市城市亮丽的名片. 2021 年元月份以来, 来黄冈参观游览的游客络绎不绝, 现通过对参观遗爱湖的游客问卷调查, 发现每位游客选择继续游玩遗爱湖的概率都是 $\frac{1}{3}$, 不游玩遗爱湖的概率都是 $\frac{2}{3}$, 若不游玩遗爱湖记 1 分, 继续游玩遗爱湖记 2 分, 记已调查过的所有游客累计得分恰为 n 分的概率为 a_n , 则 $a_4 =$ _____.
16. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是棱 CC_1 的中点, N 是侧面 B_1BCC_1 内的动点, 且满足直线 $A_1N \parallel$ 平面 AD_1M , 当直线 A_1N 与平面 B_1BCC_1 所成角最小时, 记过点 D, M, N 的平面截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得到的截面为 Ω , 所有 Ω 的面积组成的集合记为 S , 则 $S =$ _____.

四、解答题(本题共6小题,共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若角 C 为 $\frac{2\pi}{3}$, 且 $\sin(A+C) = 2\sin(B+C)\cos(A+B)$

(1) 求 $a:b:c$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径 $r = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 请在下列三个条件中补充一个在下面问题中使得最终结论成立并证明你的结论.

条件①: $S_n = -a_n + t$ (t 为常数)

条件②: $a_n = b_n b_{n+1}$, 其中数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, (n+1)b_{n+1} = nb_n$

条件③: $3a_n^2 = 3a_{n+1}^2 + a_{n+1} + a_n$

数列 $\{a_n\}$ 中 a_1 是二项式 $(\frac{x^2}{\sqrt{30}} + \frac{1}{x})^6$ 展开式中的常数项, 且 _____.

求证: $S_n < 1$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立.

注: 如果选择多个条件作答, 则按第一个条件的解答计分.

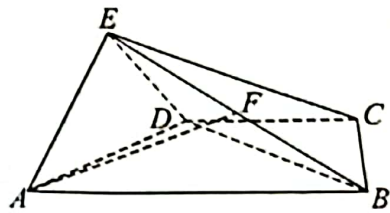


19. (本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $E-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel DC$, $AD = DC = 2$, $AB = 4$, $\triangle ADE$ 为等边三角形, 且平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$.

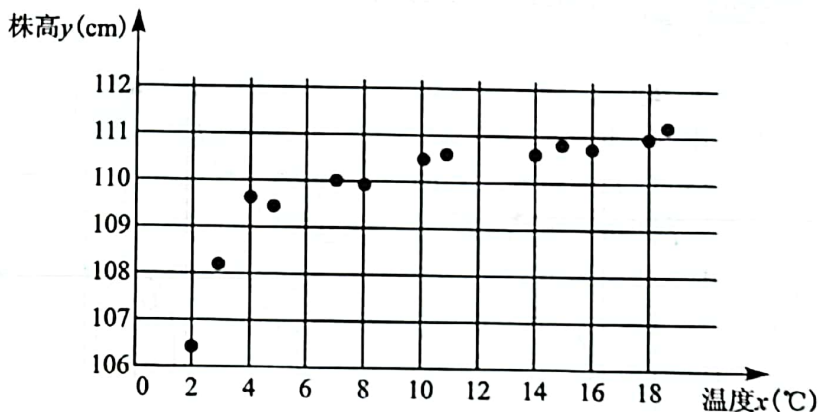
(1) 求证: $AE \perp BD$;

(2) 是否存在一点 F , 满足 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{EB}$ ($0 < \lambda \leq 1$), 且使平面 ADF 与平面 BCE 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{65}}{13}$. 若存在, 求出 λ 的值, 否则请说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

近年来, 明代著名医药学家李时珍故乡黄冈市蕲春县大力发展大健康产业, 蕲艾产业化种植已经成为该县脱贫攻坚的主要产业之一, 已知蕲艾的株高 y (单位: cm) 与一定范围内的温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 有关, 现收集了蕲艾的 13 组观测数据, 得到如下的散点图:



现根据散点图利用 $y = a + b\sqrt{x}$ 或 $y = c + \frac{d}{x}$ 建立 y 关于 x 的回归方程, 令 $s = \sqrt{x}$, $t = \frac{1}{x}$ 得到如下数据:

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{s}$	$\bar{t}$
10.15	109.94	3.04	0.16

$\sum_{i=1}^{13} s_i y_i - 13 \bar{s} \cdot \bar{y}$	$\sum_{i=1}^{13} t_i y_i - 13 \bar{t} \cdot \bar{y}$	$\sum_{i=1}^{13} s_i^2 - 13 \bar{s}^2$	$\sum_{i=1}^{13} t_i^2 - 13 \bar{t}^2$	$\sum_{i=1}^{13} y_i^2 - 13 \bar{y}^2$
13.94	-2.1	11.67	0.21	21.22

且 (s_i, y_i) 与 (t_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, 13$) 的相关系数分别为 r_1, r_2 , 且 $r_2 = -0.9953$.

(1) 用相关系数说明哪种模型建立 y 与 x 的回归方程更合适;

(2) 根据(1)的结果及表中数据, 建立 $\hat{y}$ 关于 x 的回归方程;



(3) 已知浙艾的利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 20y - \frac{1}{2}x$, 当 x 为何值时, z 的预报值最大.

附: 参考数据和公式: $0.21 \times 21.22 = 4.4562$, $11.67 \times 21.22 = 247.6374$, $\sqrt{247.6374} = 15.7365$, 对于一组数据 $(u_i, v_i) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, 其回归直线方程 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距

的最小二乘法估计分别为 $\beta = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n \bar{u} \cdot \bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \bar{u}^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{v} - \beta \bar{u}$.

相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n \bar{u} \cdot \bar{v}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \bar{u}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2 - n \bar{v}^2}}$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x - 2a \ln x - \frac{1}{x}$, $(a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2 - 4a$.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点到右顶点的距离为 $\sqrt{7}$, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 过椭圆 C 的左焦点 F_1 作不与 x 轴重合的直线 MN 与椭圆 C 相交于 M, N 两点, 过点 M 作直线 $m: x = -2a$ 的垂线 ME , E 为垂足.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) ① 已知直线 EN 过定点 P , 求定点 P 的坐标.

② 点 O 为坐标原点, 求 $\triangle OEN$ 面积的最大值.

