

2021 湖北省年八市高三 (3 月) 联考 数学试题参考答案及评分标准

2021. 03. 02

一、单选题 1-4 BCAB 5-8 ACDB
二、多选题 9. BC 10. BD 11. BC 12. ACD

三、填空题 13. 1 14. $2\sqrt{5}$ 15. $\frac{61}{81}$ 16. $\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{9}{8}\right\}$

四、解答题

17. 解析: (1) 由 $\sin(A+C) = 2\sin(B+C)\cos(A+B)$ 得 $\sin B = -2\sin A\cos C$, 又 $C = \frac{2\pi}{3}$

代入得 $\sin A = \sin B$ 即 $A = B, a = b$,

所以 $a:b:c = \sin \frac{\pi}{6} : \sin \frac{\pi}{6} : \sin \frac{2\pi}{3} = 1:1:\sqrt{3}$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $\frac{r}{\frac{c}{2}} = \tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 - \sqrt{3}$ 得 $c = \frac{2r}{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{3}$, 所以

$a = b = 1, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 10 分

18. 解析: 二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{x^2}{\sqrt{30}}\right)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r \left(\frac{1}{\sqrt{30}}\right)^{6-r} x^{12-3r}$, 令 $r = 4$ 得

展开式的常数项为 $a_1 = \frac{1}{2}$6 分

可选择的条件为①或②或③

若选择①: 在 $S_n = -a_n + t$ 中令 $n = 1$ 得 $t = 1$, $S_{n-1} = -a_{n-1} + 1$ 两式相减得

$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$,9 分

故 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

所以 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ 恒成立.12 分

若选择②: 由 $(n+1)b_{n+1} = nb_n$ 得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n}{n+1}$,

所以 $b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = \frac{1}{n} (n \geq 2), n = 1$ 时也满足,

则 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,9 分

$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ 恒成立.12 分

若选择③: 则 $3a_{n+1}^2 - 3a_n^2 = -(a_{n+1} + a_n), a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{3}$, 或 $a_{n+1} + a_n = 0$ 9 分

又 $a_1 = \frac{1}{2}$, 当 $a_{n+1} + a_n = 0$ 时, $S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数.} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \therefore S_n < 1$

当 $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{3}$ 时, $S_n = \frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{6} = -\frac{1}{6}(n^2 - 4n)$,

此时 $n = 2$ 时 $(S_n)_{\max} = \frac{2}{3} < 1$ 12 分

19.解: (1) 取 AB, AD 的中点 G, H , 连接 DG, EH , $\because BG = \frac{1}{2}AB = CD, BG \parallel CD$, $\therefore$ 四边形

$BCDG$ 是平行四边形, $DG = BC = AG = AD = 2$, $\therefore \triangle ADG$ 为等边三角形,

$DG = \frac{1}{2}AB$, $\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形, $\therefore AD \perp BD$. $\because$ 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平

面 $ABCD$, $AD =$ 平面 $ADE \cap$ 平面 $ABCD$, $\therefore BD \perp$ 平面 $ADE, AE \subset$ 平面 ADE , $\therefore$

$AE \perp BD$ 5 分

(2) F 为 EB 中点即可满足条件.

取 AD 的中点 H , 连接 EH , 则 $EH = \sqrt{3}, BD = 2\sqrt{3}$, 如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 则

$D(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2\sqrt{3}, 0), C(-1, \sqrt{3}, 0), E(1, 0, \sqrt{3})$, 则

$$\overrightarrow{DA} = (2, 0, 0), \overrightarrow{CB} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{EB} = (-1, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{EB} = (-\lambda, 2\sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3}\lambda),$$

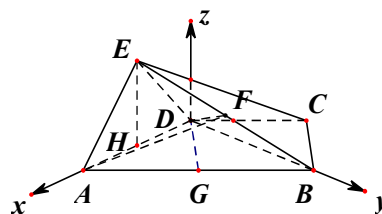
$$\overrightarrow{DF} = (1 - \lambda, 2\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda),$$

设平面 ADF 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 BCE 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$.

由 $\begin{cases} \overrightarrow{DF} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$, 得

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + 2\sqrt{3}\lambda y_1 + (\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)z_1 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取}$$

$$\vec{m} = (0, \lambda - 1, 2\lambda);$$



$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{EB} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0 \\ -x_2 + 2\sqrt{3}y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取} \vec{n} = (-\sqrt{3}, 1, 3).$$

$$\text{于是, } |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\lambda - 1 + 6\lambda|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 1}} = \frac{\sqrt{65}}{13}.$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = -\frac{1}{3} \text{ (舍去)}$$

所以存在 $\lambda = \frac{1}{2}$ 使得平面 ADF 与平面 BCE 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{65}}{13}$12 分

20. (1) 由题意知 $r_2 = -0.9953$,

$$r_1 = \frac{13.94}{\sqrt{11.67} \sqrt{21.22}} = \frac{13.94}{\sqrt{247.6374}} = 0.8858,$$

因为 $|r_1| < |r_2| < 1$, 所有用 $y = c + \frac{d}{x}$ 模型建立 y 与 x 的回归方程更合适.4 分

$$(2) \text{ 因为 } \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{13} t_i y_i - 13 \bar{t} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{13} t_i^2 - 13 \bar{t}^2} = \frac{-2.1}{0.21} = -10, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\hat{c} = \bar{y} - \hat{d} \bar{t} = 109.94 + 10 \times 0.16 = 111.54,$$

所以 $\hat{y}$ 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 111.54 - \frac{10}{x}$ 8 分

$$(3) \text{ 由题意知 } \hat{z} = 20\hat{y} - \frac{1}{2}x = 20(111.54 - \frac{10}{x}) - \frac{1}{2}x = 2230.8 - (\frac{200}{x} + \frac{1}{2}x)$$

$\leq 2230.8 - 20 = 2210.8$, 所以 $\hat{z} \leq 2210.8$, 当且仅当 $x = 20$ 时等号成立,
所以当温度为 20 时这种草药的利润最大.12 分

$$21. (1) f'(x) = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2}, x > 0, \text{ 令 } x^2 - 2ax + 1 = 0, \Delta = 4a^2 - 4$$

当 $\Delta \leq 0$ 即 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $\Delta > 0$ 即 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时,

① 当 $a < -1$ 时, $-2ax > 0, f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, $x_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}, x_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

综上：当 $a \leq 1$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

当 $a > 1$ 时， $f(x)$ 在 $(0, a - \sqrt{a^2 - 1})$ ， $(a + \sqrt{a^2 - 1}, +\infty)$ 上单调递增，

在 $(a - \sqrt{a^2 - 1}, a + \sqrt{a^2 - 1})$ 上单调递减。……5 分

(2) 由 (1) 知 $a > 1$ 时 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，

且 $x_1 + x_2 = 2a, x_1 x_2 = 1$ ，不妨设 $x_2 > 1 > x_1 > 0$ ，

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - 2a \ln x_1 - \frac{1}{x_1}) - (x_2 - 2a \ln x_2 - \frac{1}{x_2})}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) - 2a \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = 2 - \frac{2a \ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}.$$

$$\text{要证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2 - 4a, \text{ 即证 } \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} < 2, \text{ 即 } \frac{\ln x_2^2}{x_2 - \frac{1}{x_2}} < 2, \therefore \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0,$$

设 $g(t) = \ln t - t + \frac{1}{t} (t > 1)$ ，由 (1) 知当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $g(t) = -f(t)$ ，

则 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减， $\therefore g(t) < g(1) = 0$ 。原式得证。……12 分

$$22. (1) \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7} \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 所以 } a = 2, b = \sqrt{3}.$$

$$\text{故椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) ①由题意知，由对称性知， P 必在 x 轴上， $F(-1, 0)$ ，设直线 MN 方程： $x = my - 1$ ，

$M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ， $E(-4, y_1)$ ，

$$\text{联立方程 } \begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0,$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } -2my_1 y_2 = 3(y_1 + y_2),$$

$$\text{又 } k_{EN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 + 4}, \text{ 所以直线 } EN \text{ 方程为: } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 + 4}(x + 4), \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x = -4 - \frac{y_1(x_2 + 4)}{y_2 - y_1} = -4 - \frac{my_1y_2 + 3y_1}{y_2 - y_1}$$

$$= -4 - \frac{\frac{3}{2}(y_1 - y_2)}{y_2 - y_1} = -4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

所以直线 EN 过定点 $P(-\frac{5}{2}, 0)$ 8 分

(其它解法酌情给分)

$$\textcircled{2} \text{ 由 (1) 中 } \Delta = 144(m^2 + 1) > 0, \text{ 所以 } m \in R, \text{ 又易知 } |y_1 - y_2| = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OEN} = \frac{1}{2} |OP| |y_1 - y_2| = \frac{5}{4} \cdot \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{15\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}, \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{令 } t = \sqrt{m^2 + 1}, \quad t \geq 1, \text{ 则 } S_{\triangle OEN} = \frac{15t}{3t^2 + 1} = \frac{15}{3t + \frac{1}{t}}, \text{ 又因为 } f(t) = \frac{15}{3t + \frac{1}{t}}$$

$$\text{在 } [1, +\infty) \text{ 单调递减, 所以 } t = 1, [S_{\triangle OEN}]_{\max} = \frac{15}{4}. \quad \text{.....12 分}$$

命题人：黄梅一中 王进

潜江教研室 鲁兵

江汉油田教研室 徐洪军

审题人：黄州区一中 童云霞

黄梅一中 王卫华