

第六届湖北省高三(4月)调研模拟考试

数 学 试 卷

2021.4

本试题卷共6页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 4^x > 8\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $(1, \frac{3}{2})$
 - B. $(\frac{3}{2}, 3)$
 - C. $(2, 3)$
 - D. $(1, 3)$
2. $(x + \frac{2}{x})(x-1)^6$ 的展开式中,含 x^3 项的系数为
 - A. 45
 - B. -45
 - C. 15
 - D. -15
3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $S_{10} = 20$, $S_{20} = 30$, 则 $S_{30} =$
 - A. 20
 - B. 30
 - C. 40
 - D. 50
4. 设椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点为 F , 则对于椭圆上两动点 A, B , $\triangle ABF$ 周长的最大值为
 - A. $4 + \sqrt{5}$
 - B. 6
 - C. $2\sqrt{5} + 2$
 - D. 8
5. 下列对不等关系的判断,正确的是
 - A. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则 $a^3 > b^3$
 - B. 若 $\frac{|a|}{a^2} > \frac{|b|}{b^2}$, 则 $2^a < 2^b$
 - C. 若 $\ln a^2 > \ln b^2$, 则 $2^{|a|} > 2^{|b|}$
 - D. 若 $\tan a > \tan b$, 则 $a > b$

6. 已知 $f(x), g(x)$ 分别为定义在 R 上的奇函数和偶函数, 则下列为奇函数的是

- A. $f(g(x))$ B. $g(f(x))$ C. $f(f(x))$ D. $g(g(x))$

7. 为了更好地解决就业问题, 国家在 2020 年提出了“地摊经济”. 为响应国家号召, 有不少地区出台了相关政策去鼓励“地摊经济”. 某摊主 2020 年 4 月初向银行借了免息贷款 8000 元, 用于进货, 因质优价廉, 供不应求, 据测算: 每月获得的利润是该月初投入资金的 20%, 每月底扣除生活费 800 元, 余款作为资金全部用于下月再进货, 如此继续, 预计到 2021 年 3 月底该摊主的年所得收入为 (取 $(1.2)^{11} = 7.5, (1.2)^{12} = 9$)

- A. 24000 元 B. 26000 元 C. 30000 元 D. 32000 元

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, AC = 6, BC = 5$, 点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{5}{9}$

二、多选题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有错选的得 0 分.)

9. 四张外观相同的奖券让甲, 乙, 丙, 丁四人各随机抽取一张, 其中只有一张奖券可以中奖, 则

- A. 四人中奖概率与抽取顺序无关
B. 在甲未中奖的条件下, 乙或丙中奖的概率为 $\frac{2}{3}$
C. 事件甲或乙中奖与事件丙或丁中奖互斥
D. 事件甲中奖与事件乙中奖互相独立

10. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, 且 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{5}, \cos(\beta - \frac{\pi}{3}) = -\frac{12}{13}$, 则 $\cos(\alpha + \beta)$ 可以为

- A. $-\frac{33}{65}$ B. $-\frac{63}{65}$ C. $\frac{33}{65}$ D. $\frac{63}{65}$

11. 若四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形, 则

- A. 四个侧面可能都是直角三角形
B. 平面 PAB 与平面 PCD 的交线与直线 AB, CD 都平行
C. 该四棱锥一定存在内切球
D. 该四棱锥一定存在外接球

12. 设 $f(x) = 2|\sin x| - \cos x$, 则下列关于 $f(x)$ 的判断正确的有

- A. 对称轴为 $x = k\pi, k \in Z$ B. 最小值为 $-\sqrt{5}$
C. 一个极小值为 1 D. 最小正周期为 π

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 设复数 $z_1 = \sqrt{3} + i$, 若 $\frac{z_2}{z_1} = i$, 则 $|z_1 + z_2| =$ _____.
14. 某圆台下底半径为2, 上底半径为1, 母线长为2, 则该圆台的表面积为 _____.
15. 以抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点 F 为端点的一条射线交抛物线于点 A , 交 y 轴于点 B , 若 $|AF| = 2, |BF| = 3$, 则 $p =$ _____.
16. 若存在两个不相等的正实数 x, y , 使得 $m(y-x) + e^{2y} - e^{2x} = 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.

四、解答题(本题共6小题,共70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

在① $a_3 = b_4 + 20$, ② $a_1 = b_2$, ③ $S_3 = 5b_4 + 4$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中并解答.

已知数列 $\{a_n\}$ 为正项递增等比数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $2b_2 = b_4 - 1$, $b_5 = 3b_2, a_2 = b_5$, _____, 求数列 $\left\{ \frac{1}{b_n \log_3 a_{2n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调增区间;

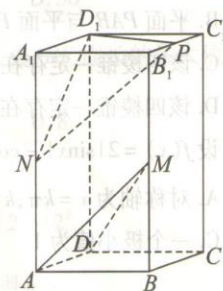
(2) $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 A 为锐角, 若 $f(A) = -\frac{\sqrt{3}}{4}, a = \sqrt{5}, b + c = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本小题满分12分)

如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面为菱形, M 为 BB_1 中点, N 为 AA_1 中点, P 为 B_1C_1 中点.

(1) 证明: 直线 $PN \parallel$ 平面 AMD ;

(2) 若 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD, AB = 2, AA_1 = 4, \angle BAD = 60^\circ$, 求平面 AMD 与平面 PND_1 所成的锐二面角的余弦值.

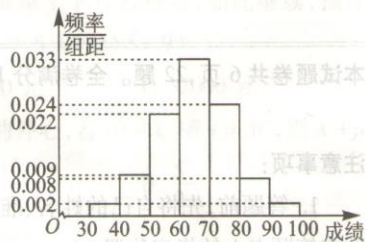


20. (本小题满分12分)

第24届冬季奥林匹克运动会,将于2022年2月4日至2022年2月20日在北京举行.实践“绿色奥运、科技奥运、人文奥运”理念,举办一届“有特色、高水平”的奥运会,是中国的庄严承诺,也是全世界的共同期待.为宣传北京冬奥会,激发人们参与冬奥会的热情,某市开展了关于冬奥知识的有奖问答.从参与的人中随机抽取100人,得分情况如下:

(I)得分在80分以上称为“优秀成绩”,从抽取的100人中任取2人,记“优秀成绩”的人数为 X ,求 X 的分布列及数学期望;

(II)由直方图可以认为,问卷成绩值 Y 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,其中 μ 近似为样本平均数, σ^2 近似为样本方差.



①求 $P(77.2 < Y < 89.4)$;

②用所抽取100人样本的成绩去估计城市总体,从城市总人口中随机抽出2000人,记 Z 表示这2000人中分数值位于区间 $(77.2, 89.4)$ 的人数,利用①的结果,求 $E(Z)$.

参考数据: $\sqrt{150} \approx 12.2$, $\sqrt{146} \approx 12.1$, $P(\mu - \sigma < Y < \mu + \sigma) = 0.6826$,

$$P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) = 0.9544, P(\mu - 3\sigma < Y < \mu + 3\sigma) = 0.9974.$$

21. (本小题满分12分)

过双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左焦点 F_1 的动直线 l 与 Γ 的左支交于 A, B 两点,设 Γ 的右焦点为 F_2 .

(1)若三角形 ABF_2 可以是边长为4的正三角形,求此时 Γ 的标准方程;

(2)若存在直线 l ,使得 $AF_2 \perp BF_2$,求 Γ 离心率的取值范围.

22. (本小题满分12分)

已知 $f(x) = ae^{2x} + (2a-1)e^x - x, a \in \mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $x \geq 0, f(x) \geq (3a-1)\cos x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.