湖北省2021届部分重点中学高三上学期期末联考

数学试题

命题学校：黄石二中　命题人：柯有轩 谈运章　审题人：吕学武 汤丽慧

审题学校：黄冈中学　审题人：袁宏彬

考试时间：2月1日15：00~17：00 考试用时：120分钟 全卷满分：150分

★祝考试顺利★

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in R\mid y=x+1\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1, x\in R\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{(0,0),(1,2)\}$　　C. $\varnothing$　　D. $[1,+\infty)$

2. 若 m、$n\in R$ 且 $\dfrac{4+3i}{3-4i}=m+ni$（其中 i 为虚数单位），则 $m-n=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{25}$　　B. -1　　C. 1　　D. 0

3. 抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标为（　　）

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$　　D. $(0,1)$

4. 已知 a 是实数，那么“$a>2$”是“方程 $x^2+y^2-2x-a=0$ 表示圆”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 α、$\beta\in(0,\pi)$，$\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两个根，则 $\alpha+\beta=$（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}\pi$　　C. $\dfrac{4}{3}\pi$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{4}{3}\pi$

6. 贴春联、挂红灯笼是我国春节的传统习俗.现准备在大门的两侧各挂四盏一样的红灯笼，从上往下挂，可以一侧挂好后再挂另一侧，也可以两侧交叉着挂，则挂红灯笼的不同方法数为（　　）

A. $8!$　　B. 1680　　C. 140　　D. 70

7. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，首项$a_1=1$，且$2S_2+S_4=3S_3$.已知$m,n\in N^+$，若存在正整数$i,j(1<i<j)$，使得ma_i,mn,na_j成等差数列，则mn的最小值为（　　）

A. 16　　B. 12　　C. 8　　D.6

8. 设$f(x)$是定义在R上的偶函数，且当$x\geq 0$时，$f(x)=a^x\ (a>1)$.若对任意的$x\in[0,b+1]$，均有$f(x+b)\geq f^2(x)$，则实数b的最大值是（　　）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. 0　　D. 1

二、多项选择题：本大题共包括4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，至少有两个选项符合题意，全对得5分，漏选得2分，选错不得分.

9. 关于双曲线$C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，下列说法正确的是（　　）

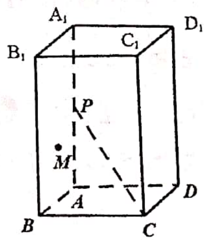
A. 该双曲线与双曲线$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{4}=1$有相同的渐近线

B. 过点$F(3,0)$作直线l与双曲线C交于A、B，若$|AB|=5$，则满足条件的直线只有一条

C. 若直线l与双曲线C的两支各有一个交点，则直线l的斜率$k\in(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$

D. 过点$P(1,2)$能作4条直线与双曲线C仅有一个交点

10. 如右图所示，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$，$AD=4$，$AA_1=6$，P是AA_1中点，点M在侧面AA_1B_1B（含边界）上运动，则（　　）



A. 直线CP与BB_1所成角余弦值为$\frac{3\sqrt{34}}{34}$

B. 存在点M（异于点P），使得P、M、C、D_1四点共面.

C. 存在点M使得$MC\perp BD$

D. 若点M到平面$ABCD$距离与到点A_1的距离相等，则点M的轨迹是抛物线的一部分

11. 对于给定的ΔABC，其外心为O，重心为G，垂心为H，则下列结论正确的是（　　）

A. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$

B. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

C. 过点G的直线l交AB、AC于E、F，若$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$，则$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$

D. $\overrightarrow{AH}$与$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$共线

12. 当$x\in\left[0,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$时，函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$与$y=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象恰有三个交点$P$、$M$、$N$，且$\Delta PMN$是直角三角形，则（　　）

A. ΔPMN的面积$S=1$

B. $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

C. 两函数的图象必在$x=\frac{\frac{13}{4}\pi-\varphi}{\omega}$处有交点

D. $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 在二项式$(\sqrt{x}+\frac{3}{x})^n$的展开式中，各项系数和为P，各项二项式系数和为Q，若$P+Q=72$，则展开式中的常数项为________.

14. 若一个圆台的侧面展开图是半圆面所在的扇环，且扇环的面积为2π，圆台上、下底面圆的半径分别为$r_1,r_2(r_1<r_2)$，则$r_2^2-r_1^2=$________.

15. 已知△ABC的顶点坐标分别为$A(3,4),B(6,0),C(-5,-2)$，则内角A的角平分线所在直线方程为________.

16. 若$\forall x>0$，不等式$\ln x+2+\frac{a}{x}\geq b(a>0)$恒成立，则$\frac{b}{a}$的最大值为________.

四、解答题：本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本题满分10分）

已知函数 $f(x)=\sin(\pi-x)\cos x-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$.

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若对 $\forall x\in\left\{\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4},\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4},\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}$，恒有 $f(x)+\frac{1}{2}>0$ 成立，且______，求△ABC 面积的最大值. 在下列四个条件中，任选 2 个补充到上面问题中，并完成求解.其中 a,b,c 为△ABC 的三个内角 A,B,C 所对的边.

①△ABC 的外接圆直径为 4；② a 是直线 $\sqrt{2}x+y+3=0$ 截圆 O：$x^2+y^2=4$ 所得的弦长；③ $a\sin A+b\sin B=c\sin C$；④ $\sqrt{3}\sin A+\cos A=\sqrt{3}$.

18. （本题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，且 $a_{n+1}=2a_n-n+1$.

（1）证明：数列 $\{a_n-n\}$ 为等比数列；

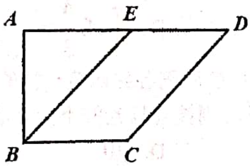
（2）记 $b_n=\frac{2^n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，$S_n$ 是数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的和，求证：$S_n<\frac{1}{3}$.

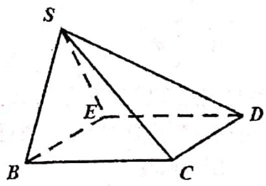
19. （本题满分 12 分）

如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle BAD=90°$，且 $AB=BC=\frac{1}{2}AD$，E 是 AD 的中点，将△ABE 沿 BE 折起到△SBE 的位置，使平面 $SBE\perp$ 平面 $BCDE$.

（1）求二面角 $B\text{-}SC\text{-}D$ 的正弦值；

（2）在直线 SB 上是否存在点 P，使 $PD\perp$ 平面 SBC？若存在，请求出点 P 所在的位置；若不存在，请说明理由.





20.（本题满分 12 分）

有治疗某种疾病的 A、B 两种药物，为了分析药物的康复效果进行了如下随机抽样调查：A、B 两种药物各有 100 位病人服用，他们服用药物后的康复时间（单位：天数）及人数记录如下：

服用 A 药物：

康复时间	10	11	12	13	14	15	16
人数	9	14	16	15	16	18	12

服用 B 药物：

康复时间	12	13	14	15	16	17	a
人数	11	15	14	16	18	16	10

假设所有病人的康复时间相互独立，所有病人服用药物后均康复.

（1）若康复时间低于 15 天（不含 15 天），记该种药物对某病人为“速效药物”.当 $a>17$ 时，请完成下列 2×2 列联表，并判断是否有 99%的把握认为病人服用药物 A 比服用药物 B 更速效？

	速效人数	非速效人数	合计
服用 A 药物			
服用 B 药物			
合计			

（2）分别从服用 A、B 药物康复时间不同的人中，每种康复时间中各取一人，记服用 A 药物的 7 人为Ⅰ组，服用 B 药物的 7 人为Ⅱ组.现从Ⅰ、Ⅱ两组中随机各选一人，分别记为甲、乙.

①a 为何值时，Ⅰ、Ⅱ两组人康复时间的方差相等（不用说明理由）；

②在①成立且 $a>12$ 的条件下，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率.

参考数据：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+b)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

21. （本题满分 12 分）

已知在平面直角坐标系中，圆 $A: x^2+y^2+2\sqrt{7}x-57=0$ 的圆心为 A，过点 $B(\sqrt{7},0)$ 任作直线 l 交圆 A 于点 C、D，过点 B 作与 AD 平行的直线交 AC 于点 E.

（1）求动点 E 的轨迹方程；

（2）设动点 E 的轨迹与 y 轴正半轴交于点 P，过点 P 且斜率为 k_1, k_2 的两直线交动点 E 的轨迹于 M、N 两点（异于点 P），若 $k_1+k_2=6$，证明：直线 MN 过定点.

22. （本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=3x-x^3$，若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有两个正实数根 x_1, x_2 且 $x_1<x_2$.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）求证：$x_2-x_1<2-\dfrac{a}{2}$.