湖北省2021届部分重点中学高三上学期期末联考

数学试卷参考答案

一、单项选择题：DBCAC　DCB

二、多项选择题：9.ACD　10.ABD　11.ACD　12.BD

三、填空题：13.9　14.4　15. $7x-y-17=0$　16. e^2

1. D 解析：因为 $A=(-\infty,+\infty), B=[1,+\infty)$，所以 $A\cap B=[1,+\infty)$。

2. B 解析：因为 $\dfrac{4+3i}{3-4i}=i$，则 $m=0,n=1$，所以 $m-n=-1$。

3. C 解析：抛物线的标准方程为 $x^2=\dfrac{1}{2}y$，故其焦点坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$

4. A 解析：方程 $x^2+y^2-2x-a=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1+a$，表示圆则需 $1+a>0$，解得 $a>-1$，因为 $a>2\Rightarrow a>-1$，而反之不成立，所以“$a>2$”是“方程 $x^2+y^2-2x-a=0$ 表示圆”的充分不必要条件。

5. C 解析：由题意得 $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3}<0,\tan\alpha\tan\beta=4$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$，又 α、$\beta\in(0,\pi)$，可得 $\tan\alpha<0,\tan\beta<0$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{4}{3}\pi$。

6. D 解析：若8盏灯笼任意挂，不同的挂法共有 A_8^8 种，又左右两边四盏灯笼挂的顺序一定，故共有 $\dfrac{A_8^8}{A_4^4A_4^4}=70$ 种不同挂法。（挂8盏灯笼的8个顺序位次中选4个挂左边4盏灯笼，共有 $C_8^4=70$ 种.）

7. C 解析：由 $2S_2+S_4=3S_3\Rightarrow a_4=2a_3$，又数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $a_n=2^{n-1}$。由 ma_i,mn,na_j 成等差数列，得 $2mn=ma_i+nb_j$，即 $2mn=m\cdot2^{i-1}+n\cdot2^{j-1}\geq2\sqrt{mn\cdot2^{i+j-2}}$，则 $mn\geq2^{i+j-2}\geq2^{2+3-2}=8$，当且仅当 $i=2,j=3$ 时等号成立，此时 $m=4,n=2$，所以 mn 的最小值为8.

8. B 解析：因为当 $x\geq0$ 时，$f(x)=a^x\ (a>1)$，且 $f(x)$ 为R上偶函数，故 $f(x)=a^{|x|}$ 且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增。所以 $f^2(x)=a^{2|x|}=a^{|2x|}=f(2x)$，故 $f(x+b)\geq f(2x)$

$\Leftrightarrow|x+b|\geq|2x|\Leftrightarrow3x^2-2bx-b^2\leq0$ 对任意的 $x\in[0,b+1]$ 成立，设 $g(x)=3x^2-2bx-b^2$，

则$\begin{cases} g(0)\le 0 \\ g(b+1)\le 0 \end{cases}$，解得$-1<b\le -\dfrac{3}{4}$，所以实数$b$的最大值为$-\dfrac{3}{4}$。故选 B

9. ACD 解析：双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$与$\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{4}=1$的渐近线均为$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，故 A 正确；若过$F(3,0)$的直线$l$与双曲线$C$的右支交于$A$、$B$，则此时通径最短为 5，若直线$l$与双曲线$C$的左右两支分别交于$A$、$B$，则$|AB|$最小为 4。故$|AB|=5$时，这样的直线$l$有 3 条，B 错误；因为双曲线$C$的渐近线为$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，直线$l$与双曲线$C$的两支各有一个交点，则直线$l$的斜率$k$满足$k\in(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2})$，故 C 正确；过点$P(1,2)$可作 2 条与渐近线平行的直线和两条切线，均与双曲线只有 1 个交点，故这样的直线共有 4 条，D 正确。

10. ABD 解析：直线CP与BB_1所成角即为CP与AA_1所成角$\angle CPA$，又$\cos\angle CPA=\dfrac{AC}{CP}=\dfrac{5}{\sqrt{3^2+5^2}}=\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$，故 A 正确；在平面$ABB_1A_1$内，过点$P$作$D_1C$的平行线，点 M 在此平行线上均可，故 B 正确；设点M在直线AB上的射影为N，则当$MC\perp BD$时，$NC\perp BD$，在平面$ABCD$内过点C作BD的垂线，与直线AB的交点在BA的延长线上，故 C 不正确；点M到平面$ABCD$的距离即为点M到直线AB的距离，由抛物线的定义可知此时点M的轨迹是抛物线的一部分，故 D 正确.

11. ACD 解析：由垂径定理可知，外心 O 在$\overrightarrow{AB}$上的投影为线段AB的中点，所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$，故 A 成立；$H$为垂心，则$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$，故 B 不正确；因为$G$、$E$、$F$三点共线，故存在实数$t$，使得$\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AE}+(1-t)\overrightarrow{AF}=t\lambda\overrightarrow{AB}+(1-t)\mu\overrightarrow{AC}$又$G$为$\Delta ABC$的重心，故$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以$\begin{cases} t\lambda=\dfrac{1}{3} \\ (1-t)\mu=\dfrac{1}{3} \end{cases}$，则$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=3$，故 C 成立；

因为$\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}=-|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|=0$，

所以$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$与$\overrightarrow{BC}$垂直，又$H$为垂心，则$\overrightarrow{AH}$也与$\overrightarrow{BC}$垂直，所以$\overrightarrow{AH}$与$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$共线，故 D 成立。

12. BD 解析：因为图象恰有三个交点 P、M、N，且 ΔPMN 是直角三角形，可知 ΔPMN 的高为 $\sqrt{2}$，且是等腰直角三角形，可得斜边长为 $2\sqrt{2}$，即周期 $T=2\sqrt{2}$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=2\sqrt{2}$，可得 $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，故 B 正确；$\Delta PMN$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$，故 A 不正确；当 $x\in\left[0,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$ 时，$\omega x+\varphi\in\left[\varphi,\frac{5\pi}{2}+\varphi\right]$，由正弦、余弦函数图象可得：$-\frac{3\pi}{4}<\varphi\le\frac{\pi}{4}$ 且 $\frac{9\pi}{4}\le\frac{5\pi}{2}+\varphi<\frac{13\pi}{4}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，故 D 正确；$\omega x+\varphi<\frac{13}{4}\pi$，故 C 不正确。

13. 9 解析：二项式 $(\sqrt{x}+\frac{3}{x})^n$ 的展开式中，各项系数和为 4^n，各项二项式系数和 2^n，所以 $4^n+2^n=72$，可得 $n=3$，则 $(\sqrt{x}+\frac{3}{x})^3$ 的展开式中常数项为 9；

14. 4 解析：扇环的面积为 $\frac{1}{2}\pi r_2^{\ 2}-\frac{1}{2}\pi r_1^{\ 2}=2\pi$，所以 $r_2^2-r_1^2=4$。

15. $7x-y-17=0$ 解析：设角 A 的平分线交 BC 于 D，则由角平分线定理得 $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=2$，即 $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，可求得 $D(\frac{7}{3},-\frac{2}{3})$，可求得 $k_{AD}=7$，所以直线 AD 的方程为 $7x-y-17=0$

16. e^2 解析：设 $f(x)=\ln x+2+\frac{a}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，又 $a>0\Rightarrow f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递减，$(a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(a)=\ln a+3\ge b$，则 $\frac{b}{a}\le\frac{\ln a+3}{a}$，设 $g(a)=\frac{\ln a+3}{a}$，则 $g'(a)=\frac{-2-\ln a}{a^2}$ $\therefore$ 当 $a\in(0,e^{-2})$ 时，$g'(a)>0$；当 $a\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$g'(a)<0$ $\therefore g(a)$ 在区间 $(0,e^{-2})$ 上单调递增，在区间 $(e^{-2},+\infty)$ 上单调递减，故 $g(a)_{\max}=g(e^{-2})=e^2$，$\therefore\frac{b}{a}$ 的最大值为 e^2

17. 解：$f(x)=\sin x\cos x-\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1-\sin 2x}{2}=\sin 2x-\frac{1}{2}$ ········ 2 分

（1）由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 可得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi](k\in Z)$ ·············· 4 分

（2）当 $x=\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}$ 时，由 $f(x)+\frac{1}{2}>0$ 得 $\sin(A+\frac{\pi}{2})=\cos A>0$，

又 $A\in(0,\pi)$，则 A 为锐角。同理可得 B,C 均为锐角，即△ABC 为锐角三角形 ……………… 5 分

由③可得，$a^2+b^2=c^2$，此时△ABC 为直角三角形，不符；

若选①②：

由②可得圆 O 的圆心到直线的距离为 $\frac{3}{\sqrt{1+2}}=\sqrt{3}$，故 $a=2\sqrt{4-3}=2$

又△ABC 的外接圆直径 $2R=\frac{a}{\sin A}$，可得 $4=\frac{2}{\sin A}\Rightarrow A=\frac{\pi}{6}$ ……………… 6 分

由正弦定理得：$b=4\sin B, c=4\sin C$

$\therefore$ △ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=4\sin B\sin C=4\sin B\sin(\frac{5\pi}{6}-B)$

$=2\sin B\cos B+2\sqrt{3}\sin^2 B=\sin 2B-\sqrt{3}\cos B+\sqrt{3}=2\sin(2B-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}$ ……………… 8 分

又△ABC 为锐角三角形，$\therefore B\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ ……………… 9 分

$\therefore$ 当 $2B-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{5\pi}{12}$ 时，△ABC 的面积 S 有最大值为 $2+\sqrt{3}$；……………… 10 分

若选①④：

由④可得 $2\sin(A+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$，则 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 A 为锐角，$\Rightarrow A=\frac{\pi}{6}$ ……………… 6 分

后面解法同上；

若选②④：

由②可得圆 O 的圆心到直线的距离为 $\frac{3}{\sqrt{1+2}}=\sqrt{3}$，故 $a=2\sqrt{4-3}=2$

由④可得 $2\sin(A+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$，则 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 A 为锐角，$\Rightarrow A=\frac{\pi}{6}$ ……………… 6 分

由正弦定理得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=4$，后面解法同上；

18.　解：（1）由 $a_{n+1}=2a_n-n+1$ 可得 $a_{n+1}-(n+1)=2(a_n-n)$，又 $a_1-1=2$

故 $\{a_n-n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列；……………… 6 分

（2）由（1）知 $a_n-n=2^n$，则 $a_n=2^n+n$ ……………… 7 分

$\therefore b_n=\frac{2^n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$ ………………9 分

$\therefore S_n=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+n+1}<\frac{1}{3}$得证……… 12 分

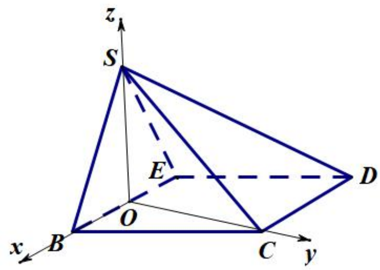
19. 解：(1) 取BE中点为O，由题意可得四边形$ABCE$为正方形，则$SO\perp BE$，$CO\perp BE$，又平面$SBE\perp$平面$BCDE$，面$SBE\cap$平面$BCDE=BE$ $\therefore SO\perp OC$。…………… 2 分

故OB,OC,OS两两垂直，以O为原点，OB为x轴，OC为y轴，OS为z轴建立空间直角坐标系，不妨设$SB=SE=ED=BC=\sqrt{2}$，则$BE=CD=2$，

则$S(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-2,1,0)$，

设平面SBC的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{SC}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{SB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1-z_1=0\\x_1-z_1=0\end{cases}$，

令$x_1=1$得$\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$，



设平面SCD的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{SC}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{SD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_2-z_2=0\\-2x_2+y_2-z_2=0\end{cases}$，

令$y_2=1$得$\overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$，记二面角$B-SC-D$为$\theta$，

则$|\cos\theta|=|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，那么$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

所以，二面角B-SC-D的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$…………… 8 分

(2) 假设直线SB上存在点P使得$PD\perp$平面SBC，

不妨设$P(a,0,1-a)$，所以$\overrightarrow{PD}=(-2-a,1,a)$，

又$\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$，由$\overrightarrow{PD}//\overrightarrow{n_1}$得$\begin{cases}-2-a=1\\a=1\end{cases}$，无解，故不存在点$P$使得$PD\perp$平面$SBC$.… 12 分

19. 解：(1)

	速效人数	非速效人数	合计
服用 A 药物	70	30	100
服用 B 药物	40	60	100
合计	110	90	200

由题意可得$K^2=\frac{200\times(70\times60-30\times40)^2}{100\times100\times110\times90}=\frac{200}{11}\approx18.2>6.635$，……… 4 分

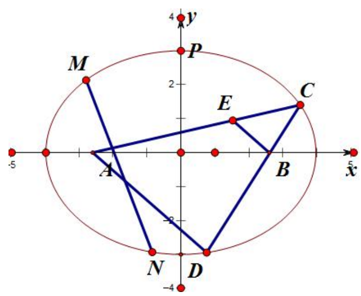
所以有99%的把握认为病人服用药物A比服用药物B更速效；……………5 分

(2) ① $a=11$或18;…………… 7 分

② 由①可得$a=18$，用$(t_{甲},t_{乙})$表示所选取人的康复时间，由题意可得基本事件总数有 49 个，

满足题意的基本事件有$(13,12)$，$(14,12)$，$(14,13)$，$(15,12)$，$(15,13)$，$(15,14)$，$(16,12)$，$(16,13)$，$(16,14)$，$(16,15)$共 10 个，所以$P=\dfrac{1+2+3+4}{49}=\dfrac{10}{49}$.…………… 12 分

21.解:（1）圆的标准方程为$\left(x+\sqrt{7}\right)^2+y^2=64$，由题意得$BE\,//\,AD$，因为$AD=AC$，所以$\angle ADC=\angle ACD$，即$\angle ECB=\angle EBC$，所以$EB=EC$，所以$EA+EB=AC=8>AB=2\sqrt{7}$,满足椭圆的定义，



所以动点E的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.…………… 4 分

（2）设$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，由题意可得$k_1+k_2=\dfrac{y_1-3}{x_1}+\dfrac{y_2-3}{x_2}=6$，

(Ⅰ)当直线MN斜率存在时，不妨设直线MN的方程为$y=kx+b$，

联立$\begin{cases} y=kx+b \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ 消去y化简得$\left(9+16k^2\right)x^2+32kbx+\left(16b^2-144\right)=0$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-32kb}{9+16k^2}, x_1x_2=\dfrac{16b^2-144}{9+16k^2}$ …………… 6 分

因为$k_1+k_2=\dfrac{y_1-3}{x_1}+\dfrac{y_2-3}{x_2}=\dfrac{kx_1+b-3}{x_1}+\dfrac{kx_2+b-3}{x_2}=6$

整理得$(2k-6)x_1x_2+(b-3)(x_1+x_2)=0$，

代入得$(2k-6)\left(16b^2-144\right)+(b-3)(-32kb)=0$，化简可得$(k-b-3)(b-3)=0$ …………… 8 分

所以$b=k-3$($b=3$舍去，因为当$b=3$时过上顶点)代入直线MN的方程可得$y=k(x+1)-3$，

所以直线MN过定点$(-1,-3)$.…………… 9 分

(Ⅱ)当直线MN斜率不存在时，$k_1+k_2=\dfrac{y_1-3}{x_1}+\dfrac{y_2-3}{x_2}=\dfrac{y_1-3}{x_1}+\dfrac{-y_1-3}{x_1}=6$，

可得$x_1=x_2=-1$，此时直线MN的方程为$x=-1$，过$(-1,-3)$.…………… 11 分

综上所述，直线MN过定点$(-1,-3)$.…………… 12 分

22.解：（1） $f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$，…………… 1 分

所以$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减，…………… 2 分

因为$f(0)=0$，且$f(x)=a$有两个正跟，所以$f(0)<a<f(1)$，即$a\in(0,2)$；…………… 3 分

（2）方法一：由题意得$f(x_1)=3x_1-x_1^3=a$ ① ； $f(x_2)=3x_2-x_2^3=a$ ②

①+②得：$2a=3(x_1+x_2)-(x_1^3+x_2^3)=(x_1+x_2)[3-(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)]$ ③

①−②得：$0=3(x_1-x_2)-(x_1^3-x_2^3)=(x_1-x_2)[3-(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)]$

$\Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2=3$ ④，将④代入③得：$a=(x_1+x_2)x_1x_2$ …………… 5 分

由（1）知 $0<x_1<1<x_2<\sqrt{3}$，设 $F(x)=f(x)-f(2-x)\quad(x\in(0,1))$

则 $F'(x)=f'(x)-[f(2-x)]'=3-3x^2+3-3(2-x)^2=-6(x-1)^2<0$

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减 $\Rightarrow F(x_1)=f(x_1)-f(2-x_1)>F(1)=0$

$\Rightarrow f(x_2)=f(x_1)>f(2-x_1)$，又 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

$\Rightarrow x_2<2-x_1 \therefore x_1+x_2<2$，…………… 9 分

故要证 $x_2-x_1<2-\dfrac{a}{2}$，只需证 $x_2-x_1<x_1+x_2-\dfrac{(x_1+x_2)x_1x_2}{2}$

即证 $(x_1+x_2)x_2<4$，因为 $x_1+x_2<2$ 且 $x_2<\sqrt{3}$，该不等式成立

故 $x_2-x_1<2-\dfrac{a}{2}$ 成立…………… 12 分

方法二：曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,0)$ 和 $(\sqrt{3},0)$ 处的切线方程为 l_1：$y=3x$ 与 l_2：$y=-6(x-\sqrt{3})$，

且由图象可知当 $x\in(0,\sqrt{3})$ 时，函数 $f(x)$ 夹在直线 l_1 与 l_2 之间，

直线 $y=a$ 与 l_1、l_2 分别交于 $\left(\dfrac{a}{3},a\right)$ 与 $\left(\sqrt{3}-\dfrac{a}{6},a\right)$，

所以 $x_2-x_1<\left(\sqrt{3}-\dfrac{a}{6}\right)-\dfrac{a}{3}=\sqrt{3}-\dfrac{a}{2}<2-\dfrac{a}{2}$。（此方法酌情打分）