参照秘密级管理★启用前

淄博市2020—2021学年度高三模拟考试

数学参考答案

一、单项选择题：

1．B；2．D；3．A；4．D；5．A；6．B；7．C；8．D．

二、多项选择题：

9．BCD；10．AC；11．AC；12．AD．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$；14．$2\sqrt{2}$；15．1022；16．-6或-9．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）解：选择条件①：

由正弦定理可得$\sin A\sin C=\sin C\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$，　　　　………………2分

由于$\sin C\neq 0$，可得$\sin A=\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A$

化简可得$\dfrac{1}{2}\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$

即　$\tan A=\sqrt{3}$，　　　　………………4分

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$，　　　　………………5分

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，

解得$bc=12$，　　　　………………………………7分

从而解得$b=c=2\sqrt{3}$　，　　　　………………9分

因此$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$．　　　　………………10分

选择条件②：

因为$\sqrt{3}\sin\dfrac{B+C}{2}=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi-A}{2}$　即$\sqrt{3}\cos\dfrac{A}{2}=\sin A$，　　　　………2分

由正弦二倍角公式可得：$\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，

由于 $\cos\frac{A}{2}\neq 0$，所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………4 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{3}$ 即 $A=\frac{2\pi}{3}$， ………5 分

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc$，

由已知可得 $bc=36$， ………7 分

法一：由 $\begin{cases} b+c=4\sqrt{3} \\ bc=36 \end{cases}$ 可得 $b^2-4\sqrt{3}b+36=0$，$\Delta<0$，方程组无解，…9 分

所以不存在满足条件的 ΔABC. ………………10 分

法二：由基本不等式可得 $bc\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=12$， ………………9 分

所以不存在满足条件的 ΔABC. ………………10 分

法三：因为 $b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=48-72<0$， ………………9 分

所以不存在满足条件的 ΔABC. ………10 分

选择条件③：

由余弦二倍角公式可得：$2\cos^2 A+3\cos A-2=0$， …………………2 分

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 -2（舍去）， …………………4 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$， …………………5 分

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，

解得 $bc=12$， …………………7 分

从而解得 $b=c=2\sqrt{3}$ ， ………………………9 分

因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$. ……………………………10 分

18．（12 分）解：（1）设第一行数的公差为d，各列的公比为q，

由题意可知$a_{13}\cdot a_{23}\cdot a_{33}=a_{23}^{\ 3}=1$，解得$a_{23}=1$， ………1 分

$a_{32}+a_{33}+a_{34}=3a_{33}=\frac{3}{2}$，解得$a_{33}=\frac{1}{2}$， ………2 分

则$q=\frac{a_{33}}{a_{23}}=\frac{1}{2}$． ………3 分

由$a_{23}=a_{13}\cdot q=\left(a_{11}+2d\right)q=\left(1+2d\right)\cdot\frac{1}{2}=1$，解得$d=\frac{1}{2}$， ………4 分

因此$a_{1n}=a_{11}+\left(n-1\right)d=1+\left(n-1\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$． ………6 分

（2）$a_{nn}=a_{1n}\cdot q^{n-1}=\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(n+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$， ………7 分

可得$S_n=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(n+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$， ………8 分

两边同时乘以$\frac{1}{2}$可得：

$\frac{1}{2}S_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(n+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$， ………9 分

上述两式相减可得：

$$\frac{1}{2}S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(n+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\left(n+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(n+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(n+3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$． ………11 分

因此$S_n=3-\left(n+3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$． ………12 分

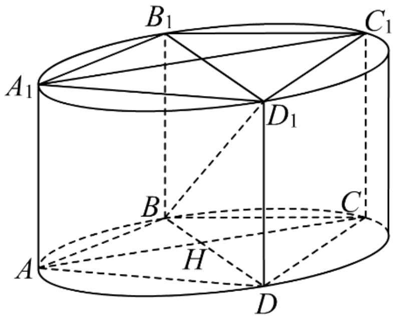
19．（12 分）解：（1）由空间几何关系可知，

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球也就是三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接圆柱的外接球，

取 AC 的中点 H，因为 $AB=BC$，所以 $BH\perp AC$，

延长 BH 到 D，使得 $BC\perp DC$，

所以 BD 为圆柱底面圆的直径，　　　　　　　　　　……………………………………2 分

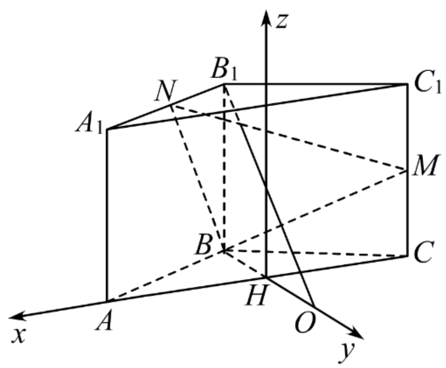


因为 $AB=BC=4$，$\angle ABC=120^\circ$，所以 $BD=8$，又 $DD_1=BB_1=4$，

所以 $2r=BD_1=\sqrt{BD^2+DD_1^2}=4\sqrt{5}$，　　　　　……………………………………3 分

所以外接球的表面积 $S=4\pi r^2=\pi(2r)^2=80\pi$.　　　　……………………………4 分

（2）据（1）可知，以 CA 所在的直线为 x 轴，以 BH 所在的直线为 y 轴，以过点 H 且和 AA_1 平行的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系如图所示：



所以 $A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,-2,0)$，$C(-2\sqrt{3},0,0)$，$A_1(2\sqrt{3},0,4)$，$C_1(-2\sqrt{3},0,4)$，

$B_1(0,-2,4)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3},2,0),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,4)$，

因为$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$，所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\left(-2\sqrt{3},2,2\right)$，

同理$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1N}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1}=\left(\sqrt{3},1,4\right)$， ………………………6 分

设平面BMN的法向量$\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BN}=0\end{cases}$， ………………………………………7 分

即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y+z=0\\ \sqrt{3}x+y+4z=0\end{cases}$，取$x=\sqrt{3}$，则$z=-2$，$y=5$，

所以$\vec{m}=\left(\sqrt{3},5,-2\right)$， ………………………………………9 分

由（1）可知，截面圆的圆心O在BH的延长线上，且$HO=2$，

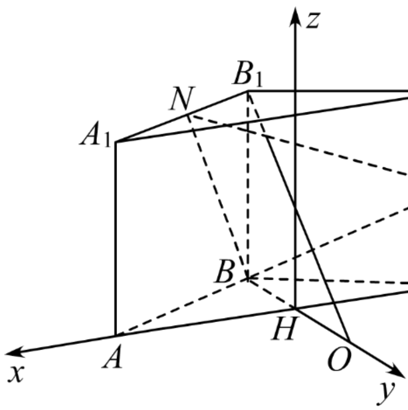
所以$\overrightarrow{OB_1}=\left(0,-4,4\right)$， ………………………………………10 分

设直线OB_1与平面BMN所成的角大小为θ，

所以$\sin\theta=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{OB_1}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB_1}\right|}=\frac{20+8}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}=\frac{7}{8}$，

所以直线OB_1与平面BMN所成角的正弦值为$\frac{7}{8}$． ……………………12 分

解法 2：（1）据已知条件，取AC的中点H，以CA所在的直线为x轴，以BH所在的直线为y轴，以过点H且和AA_1平行的直线为z轴，建立空间直角坐标系如图所示：



由已知可得：$A\left(2\sqrt{3},0,0\right)$，$B\left(0,-2,0\right)$，$C\left(-2\sqrt{3},0,0\right)$，$A_1\left(2\sqrt{3},0,4\right)$，

$C_1\left(-2\sqrt{3},0,4\right)$，$B_1\left(0,-2,4\right)$，

设球心 G 的坐标为$\left(a,b,c\right)$，则$GA=GC=GB_1$，且$c=2$

所以$\begin{cases}\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+b^2+4=\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2+4\\\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+b^2+4=a^2+\left(b+2\right)^2+4\end{cases}$，……………………………2 分

解得：$a=0$，$b=2$，所以$G\left(0,2,2\right)$，

所以$r=\sqrt{0^2+\left(2+2\right)^2+\left(2-4\right)^2}=2\sqrt{5}$，……………………………3 分

所以外接球的表面积$S=4\pi r^2=\pi\left(2r\right)^2=80\pi$.　…………………………4 分

（2）由（1）可知：所以$\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{3},2,0\right),\overrightarrow{CC_1}=\left(0,0,4\right)$，

因为$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$，所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\left(-2\sqrt{3},2,2\right)$，

同理$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1N}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1}=\left(\sqrt{3},1,4\right)$，……………………………6 分

设平面 BMN 的法向量$\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{BN}=0\end{cases}$，……………………………………………7 分

即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y+z=0\\ \sqrt{3}x+y+4z=0\end{cases}$，取$x=\sqrt{3}$，则$z=-2$， $y=5$，

所以$\vec{m}=\left(\sqrt{3},5,-2\right)$， ……………………………………………9 分

由（1）可知，截面圆的圆心O在BH的延长线上，且$HO=2$，

所以$\overrightarrow{OB_1}=\left(0,-4,4\right)$， ……………………………………………10 分

设直线OB_1与平面BMN所成的角大小为θ ，

所以$\sin\theta=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{OB_1}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB_1}\right|}=\dfrac{20+8}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}=\dfrac{7}{8}$，

所以直线OB_1与平面BMN所成角的正弦值为$\dfrac{7}{8}$． ……………………12 分

20．（12 分）解：（1）记“未来一周从周一到周五5天中至少有一天暂停会展”为事件A，则事件$\bar{A}$表示未来一周5天展出会展，于是

$$P(\bar{A})=(1-\frac{1}{2})^3(1-\frac{4}{5})^2=\frac{1}{200},$$ ………………………………1 分

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{200}=\frac{199}{200},$$

所以，未来一周从周一到周五5天中至少有一天暂停会展的概率是$\dfrac{199}{200}$． ……2 分

（2）设随机变量x表示会展展出的天数，则$x=0,1,2,3,4,5$

于是，$P(x=0)=(\dfrac{1}{2})^3(\dfrac{4}{5})^2=\dfrac{2}{25}$， ……………………………………3 分

$P(x=1)=C_3^1(\dfrac{1}{2})^3C_2^2(\dfrac{4}{5})^2+C_3^3(\dfrac{1}{2})^3C_2^1(\dfrac{4}{5})(\dfrac{1}{5})=\dfrac{7}{25}$， ………………5 分

$P(x=2)=C_3^2(\dfrac{1}{2})^3C_2^2(\dfrac{4}{5})^2+C_3^1(\dfrac{1}{2})^3C_2^1(\dfrac{4}{5})(\dfrac{1}{5})+C_3^3(\dfrac{1}{2})^3C_2^2(\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{73}{200}$， …7 分

$P(x=3)=C_3^3(\dfrac{1}{2})^3C_2^2(\dfrac{4}{5})^2+C_3^2(\dfrac{1}{2})^3C_2^1(\dfrac{4}{5})(\dfrac{1}{5})+C_3^1(\dfrac{1}{2})^3C_2^2(\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{43}{200}$， …9 分

$P(x=4)=C_3^3(\dfrac{1}{2})^3C_2^1(\dfrac{4}{5})(\dfrac{1}{5})+C_3^2(\dfrac{1}{2})^3C_2^2(\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{11}{200}$， ………………11 分

由（1）知，$P(x=5)=P(\bar{A})=\dfrac{1}{200}$，

所以$E(x)=\sum_{i=0}^{5} iP(x=i)=1\times\dfrac{7}{25}+2\times\dfrac{73}{200}+3\times\dfrac{43}{200}+4\times\dfrac{11}{200}+5\times\dfrac{1}{200}=1.9$，

即这次会展活动展出的平均天数是1.9天． ……………………………………12 分

21．（12 分）解：（1）由已知：$A_1(0,-a), A_2(0,a)$，因为$M(1,2)$在椭圆上，

直线MA_1, MA_2的斜率之积等于-4，

所以$k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=\dfrac{2+a}{1-0}\times\dfrac{2-a}{1-0}=-4$，解得：$a^2=8$，……………………1 分

又$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，所以$b^2=2$， ……………………………………………2 分

所以椭圆的标准方程为$\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{x^2}{2}=1$， ……………………………………………3 分

（2）设$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$为过点F的直线与椭圆E的交点，

①若该直线的斜率存在，不妨设为k，则该直线的方程是$y=kx+m$，

联立方程得：

$\begin{cases}4x^2+y^2=8\\ y=kx+m\end{cases}$， ……………………………………………4 分

消元并化简得：$(4+k^2)x^2+2kmx+m^2-8=0$，

所以$x_1+x_2=-\dfrac{2km}{4+k^2}, x_1x_2=\dfrac{m^2-8}{4+k^2}$， ………………………………5 分

设$H(x_3,-m)$，$G(x_4,-m)$，

因为M, A, H三点共线，即$\overrightarrow{MA}//\overrightarrow{MH}$，

所以$(x_3-1)(y_1-2)=(-m-2)(x_1-1)$，

由已知得，点M不在直线$y=kx+m$上，且$y_1=kx_1+m$，

所以 $x_3=-\dfrac{(m+2)(x_1-1)}{kx_1+m-2}+1$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………………6 分

同理可得 $x_4=-\dfrac{(m+2)(x_2-1)}{kx_2+m-2}+1$，　　　　　　　　　　　　　　………………………………7 分

所以 $x_3+x_4=-\dfrac{(m+2)(x_1-1)}{kx_1+m-2}-\dfrac{(m+2)(x_2-1)}{kx_2+m-2}+2$，

$$=-\frac{(m+2)\left[2kx_1x_2+(m-2-k)(x_1+x_2)+4-2m\right]}{k^2x_1x_2+k(m-2)(x_1+x_2)+(m-2)^2}+2,$$

将 $x_1+x_2=-\dfrac{2km}{4+k^2},x_1x_2=\dfrac{m^2-8}{4+k^2}$ 代入上式并化简得：

$x_3+x_4=\dfrac{(m+2)(k-2)}{k-m+2}+2$，

所以 N 的坐标为 $\left(\dfrac{(m+2)(k-2)}{2(k-m+2)}+1,-m\right)$，　　　　　………………………………9 分

当 $k-2\neq 0$ 时，直线 MN 的斜率 $k_{MN}=-\dfrac{2(k-m+2)}{k-2}=\dfrac{2(m-4)}{k-2}-2$

因为 k_{MN} 与 k 的取值无关，所以 $m-4=0$，即 $m=4$，

此时 $k_{MN}=-2$.　　　　　　　　　　………………………………………………10 分

②若经过点 F 的直线斜率不存在，此时 A,B 为椭圆 E 长轴端点，

不妨设 $A(0,2\sqrt{2}),B(0,-2\sqrt{2})$，因为 M,A,H 三点共线，

H 坐标为 $\left(\dfrac{m+2}{2\sqrt{2}-2}+1,-m\right)$，同理 G 坐标为 $\left(-\dfrac{m+2}{2\sqrt{2}+2}+1,-m\right)$，

此时线段 GH 的中点为 $N\left(\dfrac{m+4}{2},-m\right)$，　　　　………………………………………11 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{-m-2}{\dfrac{m+4}{2}-1}=-2$，亦满足要求，

综合①②可知：存在 $m=4$ 使得直线 MN 的斜率为定值 -2．　……………12 分

22．（12 分）解：（1）要证 $(1+\frac{1}{n})^n<e(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，两边取对数：

只需证明 $\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立，　………………………1 分

令 $x=\frac{1}{n},0<x\le 1$，构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-x\ (0<x\le 1)$，

即只需证明函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上小于零，　……………2 分

由于 $f'(x)=-\frac{x}{x+1}$，

在区间 $(0,1]$ 上，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

且 $f(0)=0$，所以在区间 $(0,1]$ 上函数 $f(x)<0$　……………4 分

所以不等式 $(1+\frac{1}{n})^n<e\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 成立；　……………5 分

（2）对于不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\le e(n\in\mathbf{N}^*)$，两边取对数：

只需不等式 $\ln(1+\frac{1}{n})\le\frac{1}{n+a}$ 成立，　………6 分

令 $x=\frac{1}{n},0<x\le 1$，构造函数 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{ax+1}\ (0<x\le 1)$，

不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+a}\le e(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立，

等价于在区间 $(0,1]$ 上 $g(x)\le 0$ 恒成立　………………………7 分

其中 $g'(x)=\frac{a^2x^2+(2a-1)x}{(1+x)(ax+1)^2}$　………8 分

由分子 $a^2x^2+(2a-1)x=0$，得其两个实数根为 $x_1=0$，$x_2=\frac{1-2a}{a^2}$；

当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$x_2\le 0$，

在区间 $(0,1]$ 上，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，

由于 $g(x)>g(0)=0$，不等式不成立　………………………………9 分

当$\sqrt{2}-1<a<\frac{1}{2}$时，$x_2\in(0,1)$，

在区间$\left(0,x_2\right)$上$g'(x)<0$，在区间$\left(x_2,1\right)$上$g'(x)>0$；

函数$g(x)$在区间$\left(0,x_2\right)$上单调递减，在区间$\left(x_2,1\right)$上单调递增;

且$g(0)=0$，只需$g(1)=\ln 2-\frac{1}{a+1}\leq 0$，

得$a\leq\frac{1}{\ln 2}-1$，即$\sqrt{2}-1<a\leq\frac{1}{\ln 2}-1$时不等式成立 ……………………10 分

当$0<a\leq\sqrt{2}-1$时，$x_2\geq 1$，

在区间$(0,1]$上，$g'(x)\leq 0$，函数$g(x)$单调递减，

且$g(x)<g(0)=0$，不等式恒成立 ………………………………………11 分

综上，不等式$(1+\frac{1}{n})^{n+a}\leq e(n\in\mathbf{N}^*,a>0)$成立，实数$a$的最大值为$\frac{1}{\ln 2}-1$.

………………………………………12 分