金华十校 2021 年 4 月高三模拟考试

评分标准与参考答案

一、选择题(4×10=40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	D	A	C	D	C	D	D	A

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分，共 36 分）

11. $\sqrt{2}$　　12. 80，4　　13. $\dfrac{80000y_0}{10000+7y_0}$，$\dfrac{3}{7}$　　14. 0，(0,2)

15. $\dfrac{6}{5}$，$\dfrac{27}{50}$　　16. $2\sqrt{2}-1$　　17. $2\sqrt{3}+\dfrac{5}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. 解：(Ⅰ)由余弦定理得 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{7}b$， ………………………… 3 分

则 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$， ………………………… 5 分

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$； ………………………… 7 分

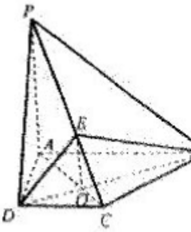
(Ⅱ)$\because \sin B+2\sin C=\sin B+2\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin B+\sqrt{3}\cos B=\sqrt{7}\sin(B+\varphi)$，

其中 $\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\\ \cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{7}},\end{cases}$ ………………………… 10 分

$\therefore \sin B+2\sin C$ 取到最大值为 $\sqrt{7}$，此时 $\begin{cases}\sin B=\dfrac{2}{\sqrt{7}},\\ \cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\end{cases}$，$\sin C=\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ ………………… 12 分

故 $k=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{5}{2}$. ………………………… 14 分

19. 解：(Ⅰ)证明：连结 AC，BD 相交于点 O，连结 EO.



在梯形 $ABCD$ 中，$\because AB/\!/CD$，可得 $\Delta AOB \backsim \Delta COD$，

$\therefore \dfrac{CO}{OA}=\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{1}{2}$，又已知 $\dfrac{CE}{EP}=\dfrac{1}{2}$，则在 ΔPAC 中，$\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{CE}{EP}$，

$\therefore EO/\!/PA$. ………………………… 4 分

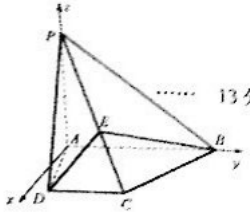
又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore EO\perp$ 底面 $ABCD$，

则平面 $EBD\perp$ 平面 $ABCD$； ………………… 7 分

(Ⅱ)如图以点 A 为坐标原点，AB 为 y 轴，PA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $AB=4$，则 $A(0,0,0)$，$D\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$C\left(\sqrt{3},3,0\right)$，$P(0,0,4)$， ………………………… 10 分

$\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$, $\overrightarrow{AD}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}$.



由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$可得 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\sqrt{3},0\right)$，又 $\overrightarrow{PC}=\left(\sqrt{3},3,-4\right)$. ······ 13分

$\therefore\cos\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PC}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|}=-\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

即直线 PC 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. ······························ 15分

20. 解：(Ⅰ) $S_{2n}=2\left(1+2+\cdots+n\right)=n\left(n+1\right)$. ······························ 3分

$S_{2n-1}=S_{2n}-n=n^2$. ······························ 6分

(Ⅱ)当 $n=2k-1$ 时，$S_{2k-1}=k^2$，$S_{2k}=k\left(k+1\right)$，$S_{2k+1}=\left(k+1\right)^2$

$\therefore {S_{2k}}^2=S_{2k-1}\cdot S_{2k+1}$，$S_{2k-1},S_{2k},S_{2k+1}$ 成等比数列，

则 $b_{2k-1}=\dfrac{S_{2k}}{S_{2k-1}}=\dfrac{k+1}{k}$. ······························ 9分

当 $n=2k$ 时，$S_{2k}=k\left(k+1\right)$，$S_{2k+1}=\left(k+1\right)^2$，$S_{2k+2}=\left(k+1\right)\left(k+2\right)$，

$\therefore 2S_{2k+1}=S_{2k}+S_{2k+2}$，$S_{2k},S_{2k+1},S_{2k+2}$ 成等差数列，

则 $b_{2k}=S_{2k+1}-S_{2k}=k+1$. ······························ 12分

$\because \dfrac{1}{b_{2k-1}}+\dfrac{1}{b_{2k}}=\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}=1$，$\therefore$当 $n=2k$ 时，$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{n}{2}$.

又$\because \dfrac{1}{b_{2k-1}}=\dfrac{k}{k+1}\geqslant\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$当 $n=2k-1$ 时，$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_{2k-2}}+\dfrac{1}{b_{2k-1}}\geqslant k-1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2k-1}{2}$，

即 $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}\geqslant\dfrac{n}{2}$.

综上所得，$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}\geqslant\dfrac{n}{2}$. ······························ 15分

21. 解：(Ⅰ)由已知得 l: $y-1=k(x+1)$，显然 $k\neq0$，$\therefore x=\dfrac{1}{k}y-\dfrac{1}{k}-1$，

联立$\begin{cases}x=\dfrac{1}{k}y-\dfrac{1}{k}-1\\ y^2=4x,\end{cases}$得 $y^2-\dfrac{4}{k}y+\dfrac{4}{k}+4=0$，······························ 4分

$\Delta=\left(\dfrac{4}{k}\right)^2-4\left(\dfrac{4}{k}+4\right)>0$，解得 $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<k<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $k\neq0$. ······················ 6分

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$.

由(Ⅰ)可知 $y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=\frac{4}{k}+4$. 又 $M\left(-\frac{1}{k}-1,0\right)$，

∴直线 CD：$x=-\frac{1}{2k}y-\frac{1}{k}-1$，

联立 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2k}y-\frac{1}{k}-1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2+\frac{2}{k}y+\frac{4}{k}+4=0$，

∴ $y_3+y_4=-\frac{2}{k}$，$y_3y_4=\frac{4}{k}+4$. ………………………………………………… 9 分

而 $\Delta=\left(\frac{2}{k}\right)^2-4\left(\frac{4}{k}+4\right)>0$，得 $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}<k<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ 且 $k\neq0$. …………………… 11 分

$k_{AC}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{y_1-y_3}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_3}$，∴直线 AC：$y-y_1=\frac{4}{y_1+y_3}(x-x_1)$，

∴ $y=\frac{4}{y_1+y_3}x-\frac{4x_1}{y_1+y_3}+y_1=\frac{4}{y_1+y_3}x-\frac{y_1^2}{y_1+y_3}+y_1=\frac{4}{y_1+y_3}x+\frac{y_1y_3}{y_1+y_3}$ ①

同理直线 BD：$y=\frac{4}{y_2+y_4}x+\frac{y_2y_4}{y_2+y_4}$ ②，

联立①②得：$\frac{4}{y_1+y_3}x+\frac{y_1y_3}{y_1+y_3}=\frac{4}{y_2+y_4}x+\frac{y_2y_4}{y_2+y_4}$，

即 $4x\left(\frac{1}{y_1+y_3}-\frac{1}{y_2+y_4}\right)=\frac{y_2y_4}{y_2+y_4}-\frac{y_1y_3}{y_1+y_3}$，

也即 $4x(y_2+y_4-y_1-y_3)=y_2y_4(y_1+y_3)-y_1y_3(y_2+y_4)$，

∵ $y_1y_2=y_3y_4$，化简得 $4x=y_1y_2$. ………………………………………………… 14 分

从而点 N 的横坐标 $x_0=\frac{y_1y_2}{4}=\frac{1}{k}+1=-5$，得 $k=-\frac{1}{6}$，满足要求.

故 $k=-\frac{1}{6}$. ………………………………………………………………………… 15 分

22. 解：(Ⅰ)由题意得：$f'(x)=-ae^{-ax}-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$，

则 $f'(0)=-a-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$，解得 $a=1$，

又 $f(0)=0$，可得 $b=-2$. ………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $f(x)=e^{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}-2$，

(ⅰ)先证：$\sqrt{x+1}\leqslant\frac{1}{2}x+1$

$\because\sqrt{x+1}\leqslant\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow(\sqrt{x+1})^2\leqslant\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$，即$\frac{1}{4}x^2\geqslant0$，得证. …………… 7分

(ⅱ)再证：$e^{-x}<\frac{1}{x+1}(x>0)$.

$\because e^{-x}<\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow e^x>x+1$，令$f(x)=e^x-x-1$，则$f'(x)=e^x-1$.

当$x>0$时，$f'(x)>0$. 即$f(x)=e^x-x-1$在$[0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x)>f(0)=0$，得证！（不证明只给1分）…………………………………… 9分

(ⅲ)由(ⅰ)可得$\sqrt{x+1}\leqslant\frac{1}{2}x+1$，即有$\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\leqslant\frac{1}{2}x+1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leqslant\frac{x+2}{2x+2}$.

结合以上结论及(ⅱ)可得，当$x>0$时，

$f(x)+\frac{3x}{x+6}<\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{2x+2}-2+\frac{3x}{x+6}$.

令$g(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{2x+2}-2+\frac{3x}{x+6}=\frac{3x(x-4)}{2(x+1)(x+6)}$

$\therefore$当$0<x<4$时，有$f(x)<0$；…………………………………………………… 13分

(ⅳ)当$4\leqslant x<6$时，$f(x)+\frac{3x}{x+6}=e^{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}-2+\frac{3x}{x+6}<\frac{1}{e^4}+\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{1}{2}<0$.

综上，原不等式得证. ………………………………………………………… 15分