

金华十校 2021 年 4 月高三模拟考试

数学试题卷

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分, 考试时间 120 分钟, 试卷总分为 150 分。请考生按规定用笔将所用试题的答案涂、写在答题纸上。

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么柱体的体积公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在 n 次试验中发生的概率为 p , 那么 n

次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_k(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) h$$

其中 S_1, S_2 表示台体的上、下底面积, h 表示棱

台的高

$$V = Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高
锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高
球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

选择题部分 (共 40 分)

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, 全集 $U = \mathbb{R}$, 则 $C_U A =$

- A. $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$ B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ C. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x | -1 < x < 1\}$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率是 $\sqrt{3}$, 则双曲线的渐近线方程是

- A. $y = \pm 2x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq |x|, \\ x - 3y + 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x - y$ 的最小值是

- A. 2 B. 0 C. -2 D. -2

4. 已知奇函数 $y = g(x)$ 的图象由函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $m (m > 0)$ 个单位后得到, 则 m 可以是

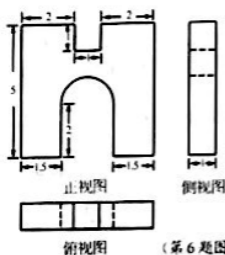
- A. $\frac{\pi-1}{2}$ B. $\pi-1$ C. $\frac{\pi+1}{2}$ D. $\pi+1$

5. 已知直线 $l_1: x+ay-1=0$, $l_2: (a+2)x+3y-3a=0$, 则 " $a=-3$ " 是 " $l_1 \parallel l_2$ " 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是

- A. $20-2\pi$
B. $19-\frac{2}{3}\pi$
C. $20-\frac{2}{3}\pi$
D. $20-\frac{1}{2}\pi$

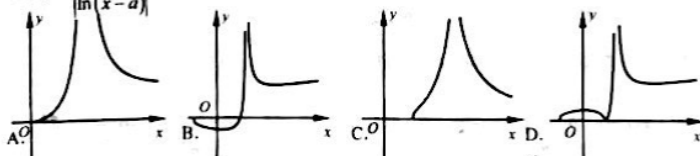


(第6题图)

7. 已知数列 $\left\{ \frac{n}{a_n} \right\}$ 是等差数列, 则

- A. $a_3 + a_6 = 2a_4$ B. $a_3 + a_6 = a_4 + a_5$ C. $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{2}{a_4}$ D. $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$

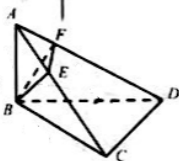
8. 函数 $y = \frac{x+a}{\ln(x-a)}$ 的图象, 不可疑是



9. 已知四面体 $A-BCD$, $AB=\sqrt{2}$, $BC=BD=2$, $AB \perp$ 平面 BCD ,

$BE \perp AC$ 于 E , $BF \perp AD$ 于 F , 则

- A. AC 可能与 EF 垂直, $\triangle BEF$ 的面积有最大值
B. AC 不可能与 EF 垂直, $\triangle BEF$ 的面积有最大值
C. AC 可能与 EF 垂直, $\triangle BEF$ 的面积没有最大值
D. AC 不可能与 EF 垂直, $\triangle BEF$ 的面积没有最大值



(第9题图)

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 和直线 $l: x=t (t>0)$, 点 A, B 在直线 l 上, 射线 OA, OB 分别交椭圆 C 于 M, N 两点, 则当 $\triangle OMN$ 面积取到最大值时, $\angle AOB$ 是

- A. 锐角 B. 直角 C. 钝角 D. 都有可能

非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分, 共 36 分.

11. 已知 i 为虚数单位, 若 $(1+i)^2 = 2i$, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 在 $\left(\frac{1}{x} + 2x \right)^n$ 的展开式中, 若 $n=5$, 则含 x 项的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若常数项是 24, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 一位数学家长期研究某地春季X流感病例总数变化情况,发现经过 x 天后的当日新增流感病例数 y 满足函数模型 $y = \frac{y_0 a^x}{1 - A(1 - a^x)}$,其中 y_0 是当 $x=0$ 时患流感病例总数, $A = \frac{y_0}{N}$, a 为流感感染速率, N 为该地区人口总数, $N=10000$.

(1)若 $a=2$,则经过3天后当日新增流感病例数为 (用 y_0 表示);

(2)当流感病例总数激增到1000例时,政府规定市民出入公共场所需佩戴口罩,引导市民多通风、勤洗手等干预措施到位,发现经过2天后当日新增流感病例数为200,则 $a =$.

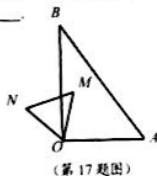
14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x < a, \\ x, & x \geq a, \end{cases}$ 已知不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-\sqrt{3}, +\infty)$,则 $a =$. 若

方程 $f(x) = m$ 有3个不同的解,则 m 的取值范围是 .

15. 袋中原有3个白球和2个黑球,每次从中任取2个球,然后放回2个黑球.设第一次取到白球的个数为 ξ ,则 $E(\xi) =$,第二次取到1个白球1个黑球的概率为 .

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,前 n 项和为 S_n .若 $q > 0$,则 $\frac{S_1 + S_2}{S_2}$ 的最小值是 .

17. 已知 $\triangle AOB$ 是直角三角形, $\angle AOB$ 是直角, $\triangle MON$ 是等边三角形, $AB=4, OM=1$,则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NB}$ 的最大值为 .



(第17题图)

三、解答题:本大题共5小题,共74分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本题满分14分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .已知 $A=60^\circ, c=kb(k \in \mathbb{R} \text{ 为系数})$.

(I)若 $k=3$,求 $\sin B$;

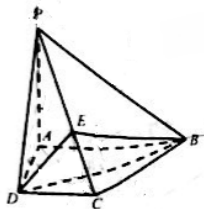
(II)求 $\sin B + 2\sin C$ 取到最大值时, k 的取值.

19. (本题满分15分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为梯形, $AB \parallel CD, AB=2BC=2CD=2DA$,侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, E 为侧棱 PC 上一点, $PE=2EC$.

(I)求证:平面 $EBD \perp$ 平面 $ABCD$;

(II)若 $PA=AB$,求直线 PC 与平面 PAD 所成角的正弦值.



(第19题图)

20. (本题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_{2n-1} = a_{2n} = n (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: 当 S_n, S_{n+1}, S_{n+2} 成等比数列时, 公比为 b_n , 当 S_n, S_{n+1}, S_{n+2} 成等差数列时, 公差也为 b_n .

(I) 求 S_{2n} 与 S_{2n-1} ;

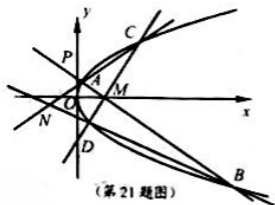
(II) 证明: $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \geq \frac{n}{2}$.

21. (本题满分 15 分)

如图, 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 过点 $P(-1, 1)$ 的直线 l 斜率为 k , 与抛物线交于 A, B 两点.

(I) 求斜率 k 的取值范围;

(II) 直线 l 与 x 轴交于点 M , 过点 M 且斜率为 $-2k$ 的直线与抛物线交于 C, D 两点, 设直线 AC 与直线 BD 的交点 N 的横坐标为 x_0 , 是否存在这样的 k , 使 $x_0 = -5$, 若存在, 求出 k 的值, 若不存在, 请说明理由.



(第 21 题图)

22. (本题满分 15 分)

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 已知函数 $f(x) = e^x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + b$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -\frac{3}{2}x$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 证明: 当 $x \in (0, 6)$ 时, $f(x) < \frac{-3x}{x+6}$.