

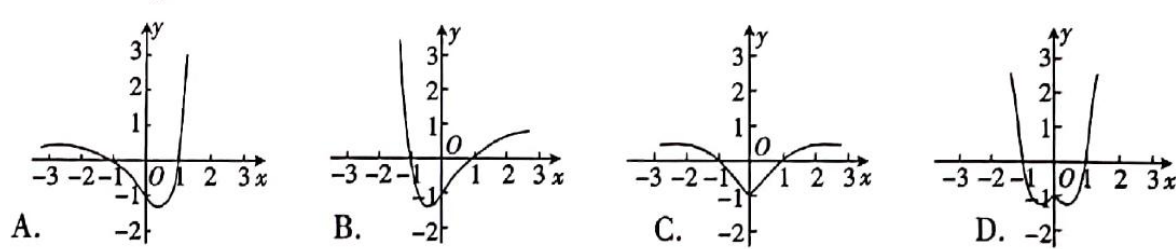
数 学

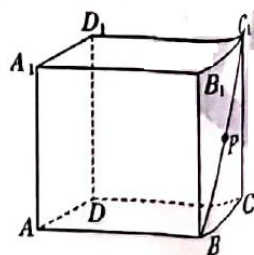
考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{1,2,3,4\}$, $N=\{x|-3<x<5\}$, 则 $M\cap N=$
A. $\{1,2,3\}$ B. $\{0,1,2,3\}$ C. $\{1,2,3,4\}$ D. $\{0,1,2,3,4\}$
2. 已知复数 $z=4-2a-(8+a)i$ 为纯虚数, 则实数 $a=$
A. -16 B. -4 C. 2 D. 4
3. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的图象为连续不断的一条曲线, 则“ $f(a) \cdot f(b)<0$ ”是“函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有零点”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0, \\ x-y+1 \geq 0, \\ 2x-y-2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z=x^2+y^2-2$ 的最小值为
A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}-2$
5. 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{e^x}$ 的图象大致为

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则双曲线 C 的渐近线方程为
A. $y \pm \sqrt{2}x = 0$ B. $\sqrt{2}y \pm x = 0$ C. $x \pm 2y = 0$ D. $2y \pm x = 0$
7. 若某随机事件的概率分布列满足 $P(X=i) = a \cdot \frac{i}{10} (i=1,2,3,4)$, 则 $D(X)=$
A. 3 B. 10 C. 9 D. 1
8. 如图, 点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 BC_1 上运动, 则下列结论一定成立的是
A. 三棱锥 $A-A_1PD$ 的体积大小与点 P 的位置有关
B. A_1P 与平面 ACD_1 相交
C. 平面 $PDB_1 \perp$ 平面 A_1BC_1
D. $AP \perp D_1C$

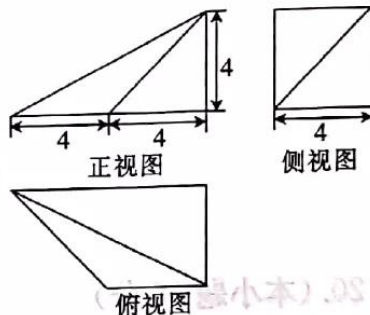


9. 已知圆 O 的半径为 2, A 为圆内一点, $OA = \frac{1}{2}$, B, C 为圆 O 上任意两点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围是
- A. $[-\frac{1}{8}, 6]$ B. $[-1, 6]$ C. $[-\frac{1}{8}, 10]$ D. $[1, 10]$
10. 设函数 $f(x) = |x+a| + |e^x+b|$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 当 $x \in [0, 1]$ 时, 记 $f(x)$ 的最大值为 $t(a, b)$, 若 $2t(a, b) \geq 2m^2 + 4m + e - 1$ 恒成立, 则 m 的最大值为
- A. e B. -2 C. 0 D. $\frac{3}{2}$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 7 小题, 共 36 分. 多空题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分.

11. 已知函数 $y = \sin 2x$, 则该函数的最小正周期为 $\blacktriangle$, 对称轴方程为 $\blacktriangle$.
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ \log_2 x^{\frac{1}{5}}, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(0) = \blacktriangle$, $f(f(-5)) = \blacktriangle$.
13. 若二项式 $(\frac{2}{x} + x + m)^5$ (m 为实数) 展开式中所有项的系数和为 1024, 则 $m = \blacktriangle$, 常数项为 $\blacktriangle$.
14. 已知直线 $l_1: x - y + 3 = 0$, $l_2: 2x + y = 0$ 相交于点 A , 则点 A 的坐标为 $\blacktriangle$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, 过点 A 作圆 C 的切线, 则切线方程为 $\blacktriangle$.
15. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 $\blacktriangle$.
16. 在新高考改革中, 学生可从物理、历史、化学、生物、政治、地理、技术 7 科中任选 3 科参加高考, 现有甲、乙两名学生先从物理、历史 2 科中任选 1 科, 再从化学、生物、政治、地理、技术 5 科中任选 2 科, 则甲、乙两人恰有 1 门学科相同的选法有 $\blacktriangle$ 种.
17. 已知平面内不同的三点 O, A, B , 满足 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = 3$, 若 $\lambda \in [0, 1]$, $|\lambda \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| + |(1-\lambda) \overrightarrow{BO} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$, 则 $|\overrightarrow{OB}| = \blacktriangle$.



三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边, 且 $\sqrt{3}a - 2c \sin(B + \frac{\pi}{3}) = 0$.

(1) 求角 C ;

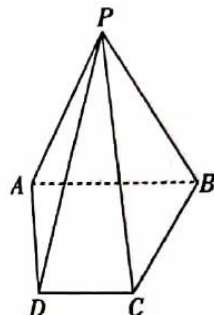
(2) 设 $AC = 6, BC = 4$, 若 P 为 AB 上一点, 且满足 $AP = CP$, 求 AP 的长.

19. (本小题 15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, $PA=PB$, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$.

(1) 若 $AB \perp PD$, 求 $\frac{CD}{AB}$ 的值;

(2) 若 $\triangle PAB$ 为边长为 2 的正三角形, $BC=2$, PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$, 求 CD 的长.



20. (本小题 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$, $nb_{n+1} - 4a_nb_n - 3n=0$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{1}{b_n + (-1)^{a_n}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_{2n} \leq \frac{6}{5}$.

21. (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 一个顶点是 $B(0, 1)$, 点 P, Q 是椭圆 C 上异于点 B 的任意两点, 且 $BP \perp BQ$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 试问直线 PQ 是否过定点? 若是, 请求出定点坐标; 若不是, 请说明理由.

22. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{a}{x}$, 其中 $a \neq 0$, $g(x) = (x-2)e^x - x - \frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设当 $a=1$ 时, 若对任意 $x \in (0, 1]$, 不等式 $f(x) + g(x) < m$ 恒成立, 求整数 m 的最小值.

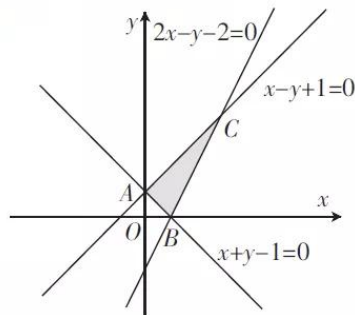
2021~2022 学年高三百校秋季开学联考

数学参考答案

一、选择题

1. C 【解析】因为 $M=\{1,2,3,4\}$, $N=\{x \mid -3 < x < 5\}$, 所以 $M \cap N = \{1,2,3,4\}$, 故选 C.
2. C 【解析】因为 $z=4-2a-(8+a)i$ 为纯虚数, 所以 $4-2a=0$ 且 $8+a \neq 0$, 解得 $a=2$. 故选 C.
3. A 【解析】由零点存在性定理, 可知充分性成立; 反之, 若函数 $y=x^2-1$, $x \in [-5, 5]$, 则易知 $f(-5) \cdot f(5) > 0$, 且在区间 $[-5, 5]$ 内有两个零点, 故必要性不成立. 故选 A.

4. C 【解析】如图, 作出平面区域可知: z 的几何意义为区域内的点到原点的距离的平方减 2, 所以最近的距离为 O 到直线 AB 的距离, 所以 $z=x^2+y^2-2$ 的最小值为 $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-2=-\frac{3}{2}$, 故选 C.



5. B 【解析】因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)=\frac{x^2-1}{e^x}$ 不是偶函数, 所以排除 C, D, 又 $f(2)=\frac{3}{e^2} < 1$, 排除 A, 即确定答案为 B. 故选 B.

6. A 【解析】双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$, $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 3$, $\frac{b^2}{a^2} = 2$, 即 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, 故选 A.

7. D 【解析】 $P(X=i) = a \cdot \frac{i}{10} (i=1, 2, 3, 4)$, 故 $\frac{a}{10} + \frac{2a}{10} + \frac{3a}{10} + \frac{4a}{10} = 1$, $\therefore a = 1$, $\therefore E(X) = \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = 3$, $\therefore E(X^2) = \frac{1}{10} + 4 \times \frac{2}{10} + 9 \times \frac{3}{10} + 16 \times \frac{4}{10} = 10$, $\therefore D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 10 - 9 = 1$, 故选 D.

8. C 【解析】对于选项 A: $V_{A-A_1PD} = V_{P-AA_1D}$, 在正方体中, 显然 $BC_1 \parallel$ 平面 AA_1D , 所以 P 到平面 AA_1D 的距离不变,

即三棱锥 $P-AA_1D$ 的高不变, 又 $\triangle AA_1D$ 的面积不变,

因此三棱锥 $P-AA_1D$ 的体积不变,

即三棱锥 $A-A_1PD$ 的体积与点 P 的位置无关, 故 A 不成立.

对于选项 B: 由于 $BC_1 \parallel AD_1$, $AD_1 \subset$ 平面 ACD_1 , $BC_1 \not\subset$ 平面 ACD_1 ,

所以 $BC_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 同理可证 $BA_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 又 $BA_1 \cap BC_1 = B$,

所以平面 $BA_1C_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 因为 $A_1P \subset$ 平面 BA_1C_1 ,

所以 $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1 , 故 B 不成立.

对于选项 C: 因为 $A_1C_1 \perp BD$, $A_1C_1 \perp BB_1$, $BD \cap BB_1 = B$,

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D , 则 $A_1C_1 \perp B_1D$; 同理 $A_1B \perp B_1D$,

又 $A_1C_1 \cap A_1B = A_1$, 所以 $B_1D \perp$ 平面 A_1BC_1 ,

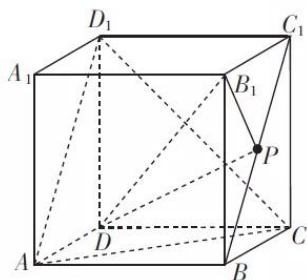
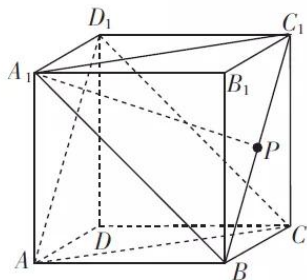
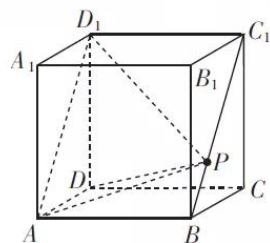
又 $B_1D \subset$ 平面 PDB_1 , 所以平面 $PDB_1 \perp$ 平面 A_1BC_1 , 故 C 成立.

对于选项 D: 当 B 与 P 重合时, AP 与 D_1C 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 D 不成立. 故选 C.

9. C 【解析】如图, 设 BC 的中点为 D , 连接 OA, OC, OD , 则 $OD \perp BC$,

设 θ 为 OA 和 BC 的夹角,

则 $AC \cdot BC = (OC - OA) \cdot BC = OC \cdot BC - OA \cdot BC$



$$= OC \cdot BC \cos \angle BCO - OA \cdot BC \cos \theta$$

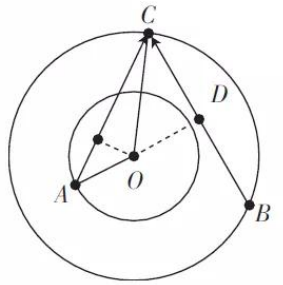
$$= \frac{1}{2} BC^2 - \frac{1}{2} BC \cos \theta,$$

$$\text{且 } \frac{1}{2} BC^2 - \frac{1}{2} BC \leq \frac{1}{2} BC^2 - \frac{1}{2} BC \cos \theta \leq \frac{1}{2} BC^2 + \frac{1}{2} BC.$$

由 $BC \in [0, 4]$, 当 $BC = \frac{1}{2}$ 时, $AC \cdot BC$ 有最小值 $-\frac{1}{8}$;

当 $BC = 4$ 时, $AC \cdot BC$ 有最大值为 10.

所以 $AC \cdot BC$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{8}, 10]$. 故选 C.



10. C 【解析】 $\because f(x) = x + a + e^x + b \geq x + a + e^x + b$,

$$f(x) = x + a + e^x + b \geq x + a - e^x - b,$$

$$\therefore t \geq \max x + a - e^x - b = \max \{ a - 1 - b, 1 + a - e - b \},$$

$$\therefore t \geq \max x + a + e^x + b = \max \{ a + 1 + b, 1 + a + e + b \},$$

$$\therefore 2t \geq \frac{a + 1 + b + 1 + a + e + b}{2} + \frac{a - 1 - b + 1 + a - e - b}{2}.$$

$$\therefore 2t \geq \frac{e}{2} + \frac{e - 2}{2} = e - 1,$$

$$\therefore t \geq \frac{e - 1}{2}, \therefore t \geq m^2 + 2m + \frac{e - 1}{2} \text{ 恒成立}, \therefore \frac{e - 1}{2} \geq m^2 + 2m + \frac{e - 1}{2}, \therefore -2 \leq m \leq 0. \text{ 故选 C.}$$

二、填空题

11. $\pi; x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

【解析】 $T = \frac{2\pi}{2}, \sin 2x = \pm 1, 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \therefore x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

12. 1; -1

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ \log_2 x^{\frac{1}{5}}, & x > 0, \end{cases} f(0) = 2^0 = 1,$

$$\therefore f(-5) = 2^{-5} = \frac{1}{32}, \therefore f(f(-5)) = f\left(\frac{1}{32}\right) = \frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{32} = -1.$$

13. 1; 161

【解析】取 $x = 1, (3 + m)^5 = 1024 \quad m = 1$, 将 $m = 1$ 代入二项式 $(\frac{2}{x} + x + 1)^5$, 所以常数项为 $1 + C_5^1 \frac{2}{x}$.

$$C_4^1 x \cdot 1^3 + C_5^2 \left(\frac{2}{x}\right)^2 \cdot C_3^2 (x)^2 \cdot 1 = 161.$$

14. $A(-1, 2); x = -1$ 或 $3x + 4y - 5 = 0$

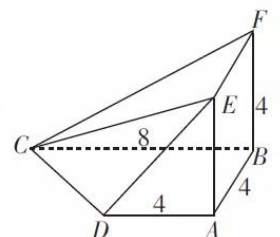
【解析】联立 $l_1: x - y + 3 = 0, l_2: 2x + y = 0$, 得 $A(-1, 2)$. 若切线斜率存在, 则设切线方程为 $y - 2 = k(x + 1)$,

$$\therefore kx - y + 2 + k = 0, \therefore 2 = \frac{k + 2 + 2 + k}{\sqrt{k^2 + 1}}, \therefore k = -\frac{3}{4}; \text{若斜率不存在, 则切线方程为 } x = -1.$$

15. $\frac{160}{3}$

【解析】该几何体的直观图如图所示, 设该几何体的体积为 V , 则 $V = V_{E-ABCD} + V_{E-BCF}$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 4 \times 4 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times 4 = \frac{160}{3}.$$



16. 180

【解析】分为两类,

第一类:物理、历史 2 科中有相同学科,则有 $C_2^1 C_3^2 C_3^2 = 60$ 种选法;
 第二类:物理、历史 2 科中没有相同学科,则有 $A_2^2 C_3^1 A_4^2 = 120$ 种选法.
 所以甲、乙两人恰有 1 门学科相同的选法有 $60+120=180$ 种.

17. $2\sqrt{3}$

【解析】由题设,如图 1,若 $OD = \lambda OB$, $BE = \frac{1}{3}BA$, 则 $(1-\lambda)BO = BD$, $\lambda OB - OA = AD$,

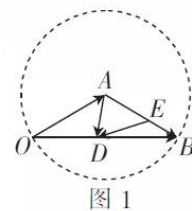


图 1

$$\frac{1}{3}BA = BE, \text{ 即 } (1-\lambda)BO - \frac{1}{3}BA = ED,$$

$$\therefore \lambda OB - OA + (1-\lambda)BO - \frac{1}{3}BA = AD + ED, \text{ 即 } AD + ED.$$

若 A' 是 A 关于 OB 的对称点,

则 $A'D = AD$, 即 $AD + ED = A'D + ED$, 如图 2,

当且仅当 A', D, E 三点共线时, $A'D + ED = A'E = 2\sqrt{3}$ 最小,

$\because OA = AB = 3$, 即 $A'B = 3$, $BE = 1$,

$$\therefore \text{此时在 } \triangle A'BE \text{ 中, } \cos \angle EBA' = \frac{9+1-12}{2 \times 3 \times 1} = -\frac{1}{3},$$

而 $\cos \angle EBA' = 2\cos^2 \angle ABO - 1$, 且 $\angle ABO$ 为锐角,

$$\therefore \cos \angle ABO = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore OB = 2AB \cdot \cos \angle ABO = 2\sqrt{3}.$$

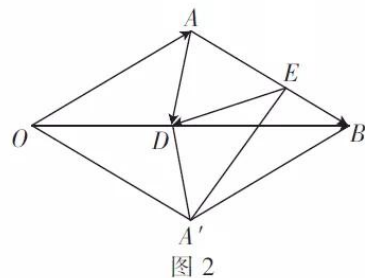


图 2

三、解答题

18. 解:(1)由正弦定理及条件,得 $\sin C(\frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A$, 3 分

$$\text{即 } \sin C(\frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(B+C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \sin C,$$

整理得 $\tan C = \sqrt{3}$, 6 分

又 C 为三角形内角, 所以 $C = 60^\circ$ 7 分

$$(2) \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C, AB^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 28,$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{7}, \text{ 9 分}$$

$$\therefore \cos A = \frac{(2\sqrt{7})^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 2\sqrt{7} \times 6} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{ 11 分}$$

$$\text{设 } AP = x, \therefore \cos A = \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{6^2 + x^2 - x^2}{2 \times 6 \times x}, \text{ 13 分}$$

$$\therefore x = \frac{3\sqrt{7}}{2}, \therefore AP = \frac{3\sqrt{7}}{2}. \text{ 14 分}$$

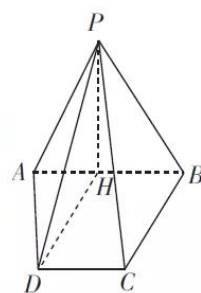
19. 解:(1)如图,取 AB 的中点 H , 连接 PH, DH .

因为 $PA = PB$, 所以 $PH \perp AB$,

又因为 $AB \perp PD$, 所以 $AB \perp$ 平面 PDH , 所以 $DH \perp AB$, 3 分

又因为 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $AB \parallel DC$, 所以四边形 $HBCD$ 为矩形, 5 分

所以 $CD = BH = \frac{1}{2}AB$, 即 $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$ 7 分



(2)法一:过 P 作 $PE \parallel BC$, 且 $PE = BC$, 连接 EC , 过 D 作 $DF \perp EC$, 交 EC 于点 F , 连接 PF 8 分

因为侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 且交线为 AB , $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

因为 $PE \parallel BC$, 且 $PE = BC$, 所以四边形 $PBCE$ 为平行四边形, 所以 $EC \parallel PB$ 10 分

又因为 $CD \parallel AB$, 且 $EC \cap CD = C$, $PB \cap AB = B$, 所以平面 $EDC \parallel$ 平面 PBA ,

所以 $BC \perp$ 平面 EDC , 所以 $BC \perp DF$,

又因为 $EC \perp DF$, 所以 $DF \perp$ 平面 PBC ,

所以 $\angle DPF$ 即 PD 与平面 PBC 所成角. 12 分

设 $CD = x$, 由平面 $EDC \parallel$ 平面 PBA , 得 $\angle DCF = \frac{\pi}{3}$, 所以 $DF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

在直角三角形 PHD 中, $PH = \sqrt{3}$, $DH = \sqrt{2^2 + (1-x)^2}$,

所以 $PD = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 + (1-x)^2}$, 又 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$,

所以 $\frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\sqrt{7 + (1-x)^2}}$, 解得 $x = 1$, 即 $CD = 1$ 15 分

注: 若直接猜答案, 反过来验证, 只给答案分.

法二: 如图, 以点 B 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $B-xyz$,

由已知条件可知, $B(0, 0, 0)$, $C(2, 0, 0)$, $A(0, 2, 0)$ 8 分

由 $\triangle PAB$ 为边长为 2 的正三角形,

所以 $P(0, 1, \sqrt{3})$, 所以 $BP = (0, 1, \sqrt{3})$, $BC = (2, 0, 0)$ 10 分

设平面 PBC 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 所以 $\begin{cases} n \cdot BP = 0, \\ n \cdot BC = 0, \end{cases}$

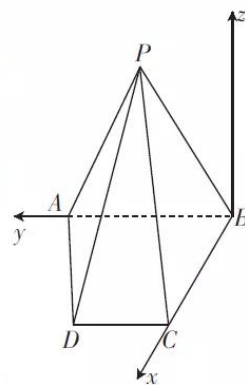
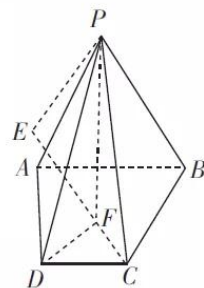
所以 $\begin{cases} y + \sqrt{3}z = 0, \\ 2x = 0, \end{cases}$ 可取 $n = (0, 3, -\sqrt{3})$ 12 分

设 $CD = x$, 所以 $D(2, x, 0)$, $PD = (2, x-1, -\sqrt{3})$,

又 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$,

所以 $\frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{3x-3+3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{4+(x-1)^2+3}}$, 14 分

解得 $x = 1$, 即 $CD = 1$ 15 分



20. (1) 解: 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$,

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(n-1)^2 - \frac{1}{2}(n-1) = n (n \geq 2),$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 符合, 故 $a_n = n$ 3 分

$$\therefore nb_{n+1} - 4a_nb_n - 3n = nb_{n+1} - 4nb_n - 3n = 0,$$

$$\therefore b_{n+1} = 4b_n + 3, \therefore b_{n+1} + 1 = 4(b_n + 1), \therefore b_1 = 2,$$

$\therefore \{b_n + 1\}$ 是以 3 为首项, 4 为公比的等比数列,

$$\therefore b_n + 1 = 3 \cdot 4^{n-1},$$

$$\therefore b_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 1. 7 分$$

(2)证明: $\because c_n = \frac{1}{b_n + (-1)^{a_n}}, \therefore c_n = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1} - 1 + (-1)^n}, \dots 9 \text{ 分}$

$$T_{2n} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{2n} = c_1 + c_3 + \dots + c_{2n-1} + c_2 + c_4 + \dots + c_{2n}$$

$$= \frac{1}{3 \times 4^0 - 2} + \frac{1}{3 \times 4^2 - 2} + \dots + \frac{1}{3 \times 4^{2n-2} - 2} + \frac{1}{3 \times 4^1} + \frac{1}{3 \times 4^3} + \dots + \frac{1}{3 \times 4^{2n-1}} \dots 11 \text{ 分}$$

$$\leq \frac{3}{3 \times 4^0} + \frac{3}{3 \times 4^2} + \dots + \frac{3}{3 \times 4^{2n-2}} + \frac{1}{3 \times 4^1} + \frac{1}{3 \times 4^3} + \dots + \frac{1}{3 \times 4^{2n-1}}$$

$$= \frac{1 - (\frac{1}{16})^n}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \left[\frac{1 - (\frac{1}{16})^n}{1 - \frac{1}{16}} \right] = \frac{52}{45} [1 - (\frac{1}{16})^n] \leq \frac{52}{45} < \frac{6}{5}. \dots 15 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 由题意得
$$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ b=1, \\ c=1, \end{cases} \dots 3 \text{ 分}$$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 $BP \perp BQ$ 知直线 BP, BQ 的斜率存在且不为 0,

设直线 BP 的斜率为 k , 直线 BP 的方程为 $y = kx + 1$,

$$\begin{cases} y = kx + 1, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (k^2 + \frac{1}{2})x^2 + 2kx = 0, \text{ 解得 } x = 0 \text{ 或 } x = -\frac{2k}{k^2 + \frac{1}{2}}. \dots 7 \text{ 分}$$

当 $x = -\frac{2k}{k^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{4k}{2k^2 + 1}$ 时, $y = \frac{1 - 2k^2}{1 + 2k^2}$, 即 $P(-\frac{4k}{2k^2 + 1}, \frac{1 - 2k^2}{1 + 2k^2}), \dots 9 \text{ 分}$

用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k , 得 $Q(\frac{4k}{k^2 + 2}, \frac{k^2 - 2}{k^2 + 2}), \dots 10 \text{ 分}$

于是直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{\frac{k^2 - 2}{k^2 + 2} - \frac{1 - 2k^2}{1 + 2k^2}}{\frac{4k}{k^2 + 2} + \frac{4k}{2k^2 + 1}} = \frac{k^2 - 1}{3k},$

直线 PQ 的方程为 $y - \frac{1 - 2k^2}{1 + 2k^2} = \frac{k^2 - 1}{3k} (x + \frac{4k}{2k^2 + 1}),$

整理得 $(k^2 - 1)x - k(3y + 1) = 0, \dots 13 \text{ 分}$

当 $x = 0, y = -\frac{1}{3}$ 时, 对任意的 $k, (k^2 - 1)x - k(3y + 1) = 0$ 恒成立,

所以直线 PQ 过定点 $(0, -\frac{1}{3}). \dots 15 \text{ 分}$

22. 解: (1) 由题意, 可得 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{a(x-1)}{x^2} (x > 0). \dots 2 \text{ 分}$

因为 $a \neq 0$, 所以当 $a > 0$ 时,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为单调递增函数;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为单调递减函数. $\dots 5 \text{ 分}$

当 $a < 0$ 时,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为单调递减函数;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为单调递增函数. 7 分

(2) 由题意可得 $m > \ln x - x + (x - 2)e^x$,

设 $h(x) = (x - 2)e^x + \ln x - x, x \in (0, 1]$, 则 $h'(x) = (x - 1)(e^x - \frac{1}{x})$, 8 分

当 $0 < x \leq 1$ 时, $x - 1 \leq 0$.

设 $u(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 则 $u'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, 所以 $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

又 $u(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0, u(1) = e - 1 > 0$,

所以 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $u(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, \ln x_0 = -x_0$ 10 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $u(x) < 0, h'(x) > 0$;

当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $u(x) > 0, h'(x) < 0$.

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(x_0) = (x_0 - 2)e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 = (x_0 - 2) \cdot \frac{1}{x_0} - 2x_0 = 1 - (\frac{2}{x_0} + 2x_0)$, 13 分

因为函数 $y = 1 - (\frac{2}{x_0} + 2x_0)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递增, 所以 $h(x_0) \in (-4, -3)$.

因为 $m > h(x)$ 对任意的 $x \in (0, 1]$ 恒成立, 且 $m \in \mathbf{Z}$,

所以 m 的最小值是 -3 15 分