

宁波市 2020 学年第二学期高考适应性考试

高三数学参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	C	C	B	B	D	B	A	C

9. 答案：A

由图可知，若 $a \geq 0$ ，则 $f[f(x)] = 0$ 得 $f(x) = 1$ ，此时仅有 2 个零点，不符；

若 $a < 0$ ，则 $f(x) = 1$ 或 $f(x) = a$ ，而 $f(x) = a$ 恰有 1 根，故 $f(x) = 1$ 恰有 2 个根，

则 $\frac{a^2}{4} < 1$ ，得 $-2 < a < 0$ 。

10. 答案：C

由题得 $x_k^2 + 2x_k = x_{k-1}^2 + 4x_{k-1} + 3$ ，

累加得 $x_{2022}^2 + 2x_{2022} = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{2021}) + 3 \times 2022$

故 $|x_1 + x_2 + \dots + x_{2021}| = \frac{1}{2} |(x_{2022} + 1)^2 - 6067|$ ， x_{2022} 为偶数

当 $|x_{2022} + 1| = 77$ 时， $|x_1 + x_2 + \dots + x_{2021}|$ 最小为 69。

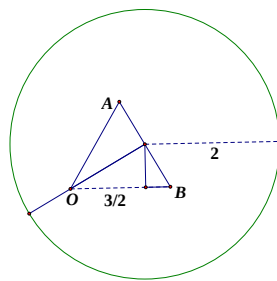
数列 $x_k = k (k \leq 75)$ ， $x_k = 76 (k \geq 76, k \text{ 为偶数})$ ， $x_k = -79 (k \geq 76, k \text{ 为奇数})$ 符合要求。

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. $-1, \sqrt{5}$ 12. $\frac{\pi}{8}, 6$ 13. 8, 8 14. $2 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2}$

15. 1050 16. $\frac{7}{2}$ 17. $\sqrt{6}$

16. 根据几何意义, 结合等和线性质, 最大值为 $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$



17. 设 $A\left(x_0, \frac{b}{a}x_0\right)$, 则 $B\left(\frac{x_0 - c}{2}, \frac{bx_0}{2a}\right)$, 根据 $k_{OB} = -\frac{a}{b}$,

得 $x_0 = \frac{a^2}{c}$, 故 $|OA| = a, |OB| = \frac{b}{2}, |AB| = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$, 从而 $2a + b - 2\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = b - a$
解得 $e = \sqrt{6}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 解：(I) 由 $1 + \frac{\tan A}{\tan B} = 1 + \frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \sin B} = \frac{\cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \sin B} = \frac{\sin C}{\cos A \cdot \sin B}$

又 $\frac{2c}{b} = \frac{2 \sin C}{\sin B}$, 得 $\cos A = \frac{1}{2}$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ -----6 分

(II) 由已知可得 $\begin{cases} a + b + c = 10 \\ a^2 = b^2 + c^2 - bc \end{cases}$ -----8 分

消去 a , 可得 $3bc - 20b - 20c + 100 = 0$

得 $3bc + 100 = 20(b + c) \geq 40\sqrt{bc}$ (当且仅当 $b = c$ 时取等号)

解得 $\sqrt{bc} \geq 10$ (舍) 或 $\sqrt{bc} \leq \frac{10}{3}$ -----12 分

故 $bc \leq \frac{100}{9}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{25}{9}\sqrt{3}$. -----14 分

19. 解：(I) 由题得 $CD \perp$ 平面 ABC , $BF \subset$ 平面 ABC , 则 $CD \perp BF$ -----2 分

又 $BF \perp AC$, -----4 分

故 $BF \perp$ 平面 DCF , 从而 $DF \perp FB$. -----6 分

(II) 设 $CD = 2$, 以 F 为原点, FA 为 x 轴正半轴, FB 为 y 轴正半轴,

建立如图所示空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$ ， $B(0,\sqrt{3},0)$ ，

$$D(-1,0,2), E(1,0,4)$$

$$\text{故 } \overrightarrow{FB} = (0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{FD} = (-1, 0, 2),$$

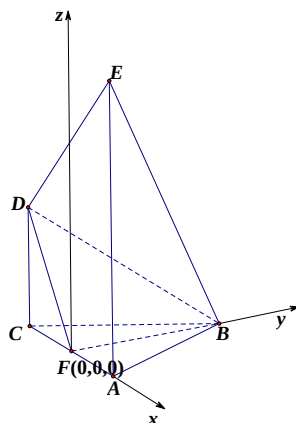
则平面 BDF 的一个法向量为 $\vec{n} = (2, 0, 1)$ -----10 分

$$\text{又 } \overrightarrow{BE} = (1, -\sqrt{3}, 4),$$

设 BE 与平面 BDF 所成角为 θ ，

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{3}{5}$$

即 BE 与平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{3}{5}$ 。-----15 分



20. 解 (I) 由 $a_1 = 1$ 及 $\frac{S_n}{a_n} = \lambda a_{n+1} (n \in N^*)$ ，得 $a_2 = \frac{1}{\lambda}$ ， $a_3 = \frac{1}{\lambda} + 1$

又 $\{a_n\}$ 为等差数列，解得 $d = 1, \lambda = \frac{1}{2}$ ，则 $a_n = n$ -----6 分

(II) 由 $(-\frac{1}{2})^{a_n} = (-\frac{1}{2})^n$ ，得 $T_n = -\frac{1}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n]$ -----8 分

由 $|pT_n - 2| \leq 1$ 恒成立，可得 $1 \leq pT_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq -\frac{p}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n] \leq 3$ 恒成立

由 $\frac{3}{4} \leq 1 - (-\frac{1}{2})^n \leq \frac{3}{2}$ ，得 $p < 0$ ，有 $1 \leq -\frac{p}{3} \cdot \frac{3}{4} \leq -\frac{p}{3} \cdot \frac{3}{2} \leq 3$

则可得实数 p 的取值范围为 $[-6, -4]$ 。-----15 分

21. 解: (I)

由题得 $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，故 $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{4} = 1$ ， $m^2 = \frac{4}{3}$ ，

椭圆 C 的方程为 $\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$.

-----5 分

(II) 设 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 则 $m^2 = c^2 + 1$

$$S_1 = S_{\triangle BOF_1} + S_{\triangle G_1OF_1} + S_{\triangle G_1OB} = S_{\triangle BOF_1} + \frac{1}{3}S_{\triangle AOF_1} + \frac{1}{3}S_{\triangle AOB} = -\frac{1}{2}cy_2 + \frac{1}{6}cy_1 + \frac{1}{6}c(y_1 - y_2) \\ = \frac{c}{3}(y_1 - 2y_2), \quad S_2 = \frac{2}{3}S_{\triangle ABO} = \frac{1}{3}c(y_1 - y_2) \quad \text{-----9 分}$$

$$\text{则 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{y_1 - 2y_2}{y_1 - y_2} \in \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right], \text{ 得 } \frac{y_1}{y_2} \in \left[-2, -\frac{1}{2} \right]$$

设 $l: x = ty + c$, 联立椭圆方程 $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$, 得 $(t^2 + m^2)y^2 + 2tcy - 1 = 0$

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{-2tc}{t^2 + m^2}$, $y_1y_2 = \frac{-1}{t^2 + m^2}$, -----12 分

$$\text{则 } \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} = \frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1y_2} - 2 \in \left[-\frac{5}{2}, -2 \right]$$

$$0 \leq \frac{4t^2c^2}{t^2 + m^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (8m^2 - 9)t^2 \leq m^2 \text{ 对 } t \text{ 恒成立,}$$

$$\text{故 } 8m^2 - 9 \leq 0, \quad 1 < m \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

-----15 分

$$22.\text{解: (I)} \quad f' x = \frac{a}{x+a} + \frac{1}{x} = \frac{a+1}{x+a} + \frac{x+a}{x^2}, \quad x > 0 \text{ 且 } x > -a \quad \text{-----1 分}$$

① $a \geq 0$, $f' x > 0$, $f x$ 单调递增; -----2 分

② $a \leq -1$, $f' x \leq \frac{-1+1}{x+a} = 0$, $f x$ 单调递减; -----4 分

$$\text{③ } -1 < a < 0, \quad -\frac{a}{a+1} > -a > 0,$$

$x \in \left(-a, -\frac{a}{a+1} \right)$ 时 $f' x < 0$, $f x$ 单调递减;

$x \in \left(-\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. -----6 分

(II) 设 $g(x) = e^{a^2x} + \ln \frac{x}{a} - 1 - f(x) = e^{a^2x} - a \ln x + a - \ln a - 1$, $x > 0$. 则 $a > 0$.

若 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -a + 1 - \ln a < 0$, 则由图象的连续性知, 必存在区间 $(0, \varepsilon)$ 使得 $g(x) < 0$ 与题

意矛盾, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -a + 1 - \ln a \geq 0$, 所以 $0 < a \leq 1$.

$g'(x) = a^2 e^{a^2x} - \frac{a}{x+a}$, $x > 0$. $g''(x) = a^4 e^{a^2x} + \frac{a}{(x+a)^2} > 0$, 所以 $g'(x)$ 单调递增.

① 若 $a = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = a^2 - 1 = 0$, $g'(x) > 0$ 恒成立.

所以 $g(x) > \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -a + 1 - \ln a = 0$, 符合.

② 若 $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = a^2 - 1 < 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时 $g'(x) \rightarrow +\infty$ 且 $g'(x)$ 单调递增.

则存在唯一 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

且 $x \in (0, x_0)$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; $x \in (x_0, +\infty)$ 时 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{a^2x_0} - a \ln x_0 + a - \ln a - 1$

由 $g'(x_0) = a^2 e^{a^2x_0} - \frac{a}{x_0+a} = 0$ 可得 $e^{a^2x_0} = \frac{1}{a(x_0+a)}$ 且 $a^2x_0 = -\ln x_0 + a - \ln a$

所以 $g(x)_{\min} = \frac{1}{a(x_0+a)} + a^3x_0 + a \ln a - \ln a - 1 = \frac{1}{a(x_0+a)} + a^3x_0 + a - a^4 + a \ln a - \ln a - 1$

$\geq 2\sqrt{\frac{1}{a(x_0+a)} \cdot a^3x_0 + a - a^4 + a \ln a - \ln a - 1} = 2a - a^4 + a \ln a - \ln a - 1$

$= 1 - a - a^3 + a^2 + a - \ln a - 1 \geq 1 - a - a^3 + a > 0$ (由不等式 $\ln x \leq x - 1$ 可得)

所以 $0 < a < 1$ 时符合.

综上 $a \in (0, 1)$.

-----15 分