

绝密★考试结束前

浙江省名校新高考研究联盟 (Z20 联盟) 2021 届高三第二次联考

数学试题卷

命题: 玉环中学 庄丰、姚必巍 审核: 嘉兴一中 许群燕 长兴中学 杨冰 校稿: 黄桂凤

考生须知:

1. 本卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟;
2. 答题前务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时, 请按照答题纸上“注意事项”的要求, 在答题纸相应的位置上规范答题, 在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后, 只需上交答题卷。

参考公式:

如果事件 A, B 互斥那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p , 那么 n

次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积,

h 表示为台体的高

柱体的体积公式

$$V = Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

选择题部分

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x > 1\}$, $B = \{x | |x-1| < 2\}$, 则 $A \cup B =$
- A. $(2, 3)$ B. $(-1, 3)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为

- A. $y = \pm 2x$ B. $y = \pm 4x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm \frac{1}{4}x$

3. 已知 i 是虚数单位, 若 $z = 1 - i$, 则 $(1+z) \cdot \bar{z}$ 的模为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$

4. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x - y - 2 \geq 0, \\ x + y - 6 \leq 0, \\ y - 1 \geq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 2x - y$ 的最大值为

A. 0
C. 9

B. 1
D. 10

5. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是 (单位: cm^3) 是

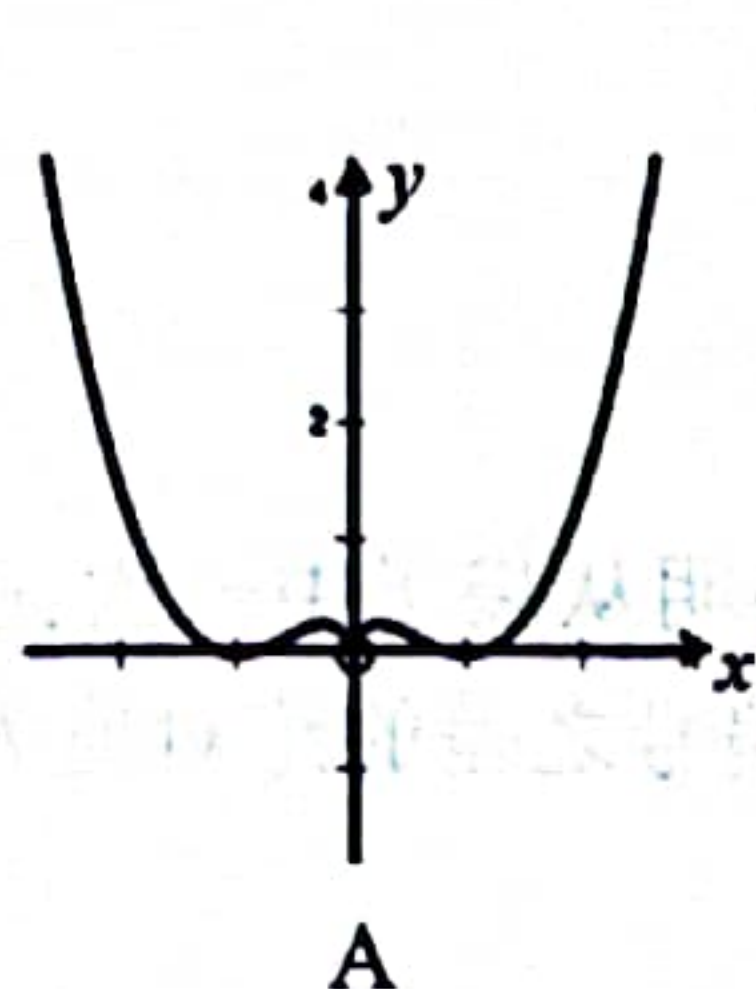
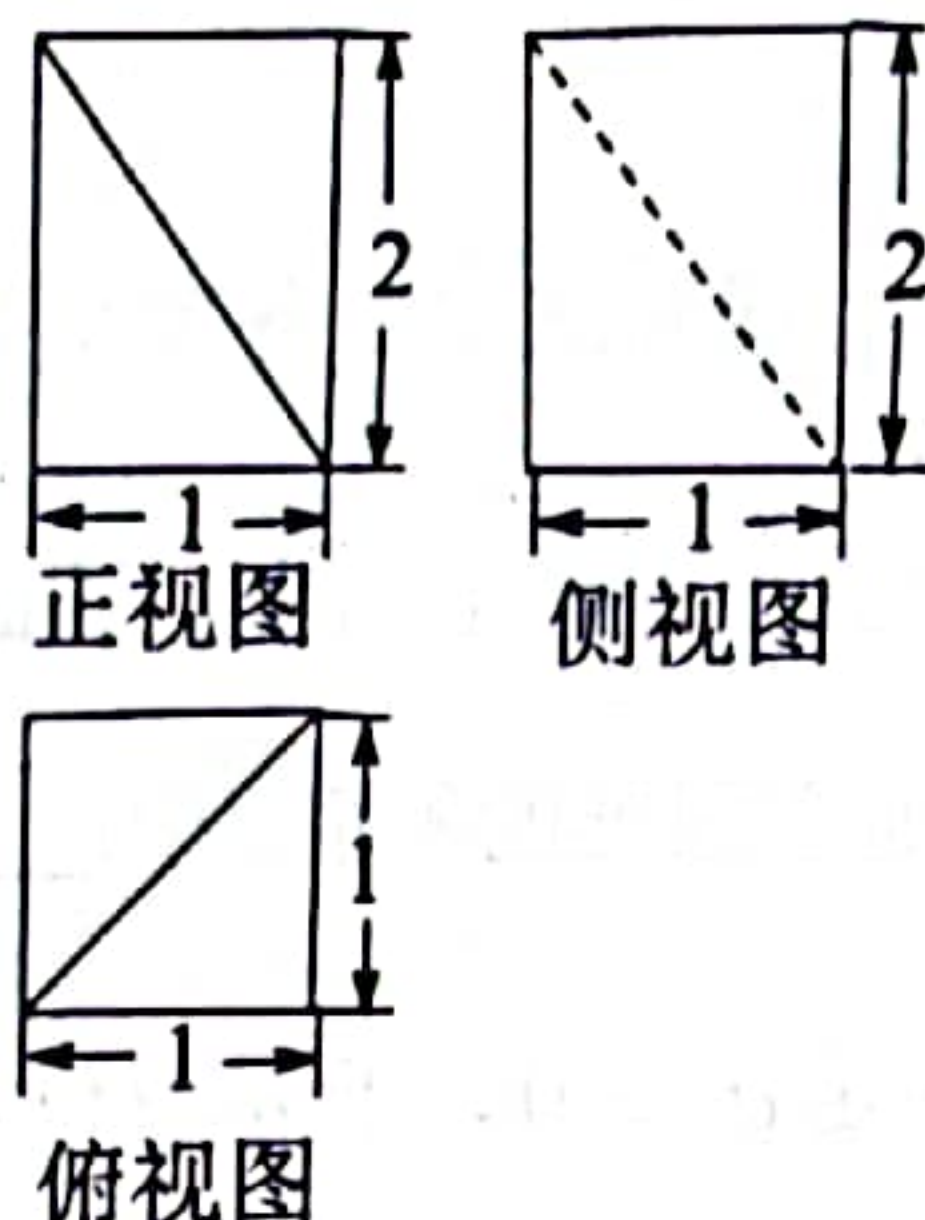
A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{3}$

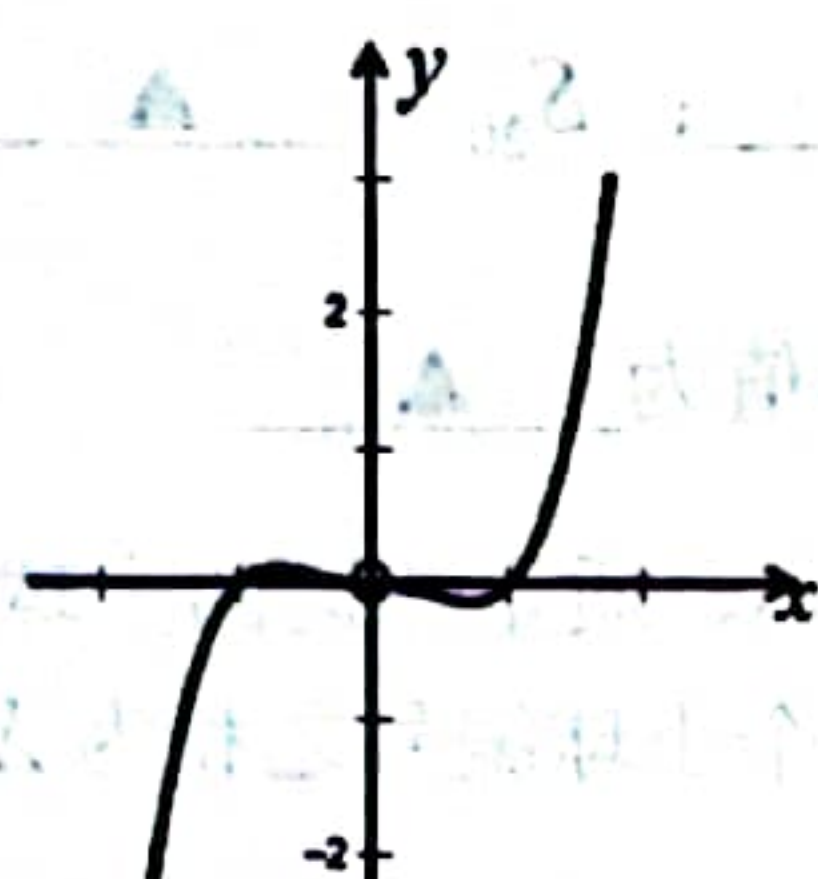
C. 1

D. 2

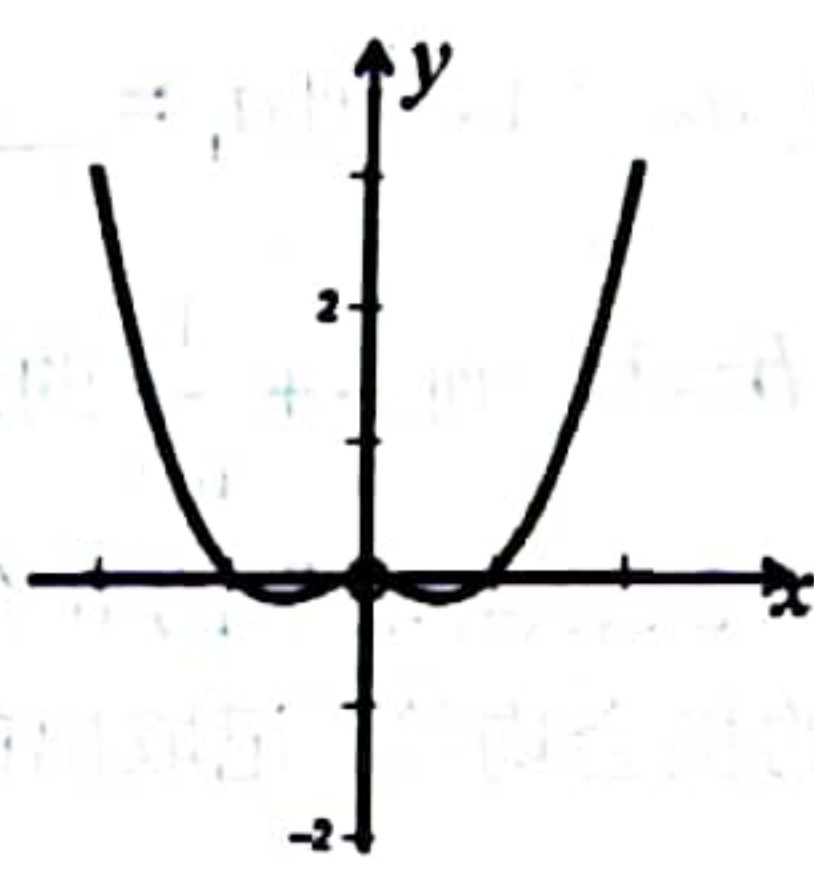
6. 函数 $f(x) = (x^2 - |x|) \ln|x|$ 的图象可能是



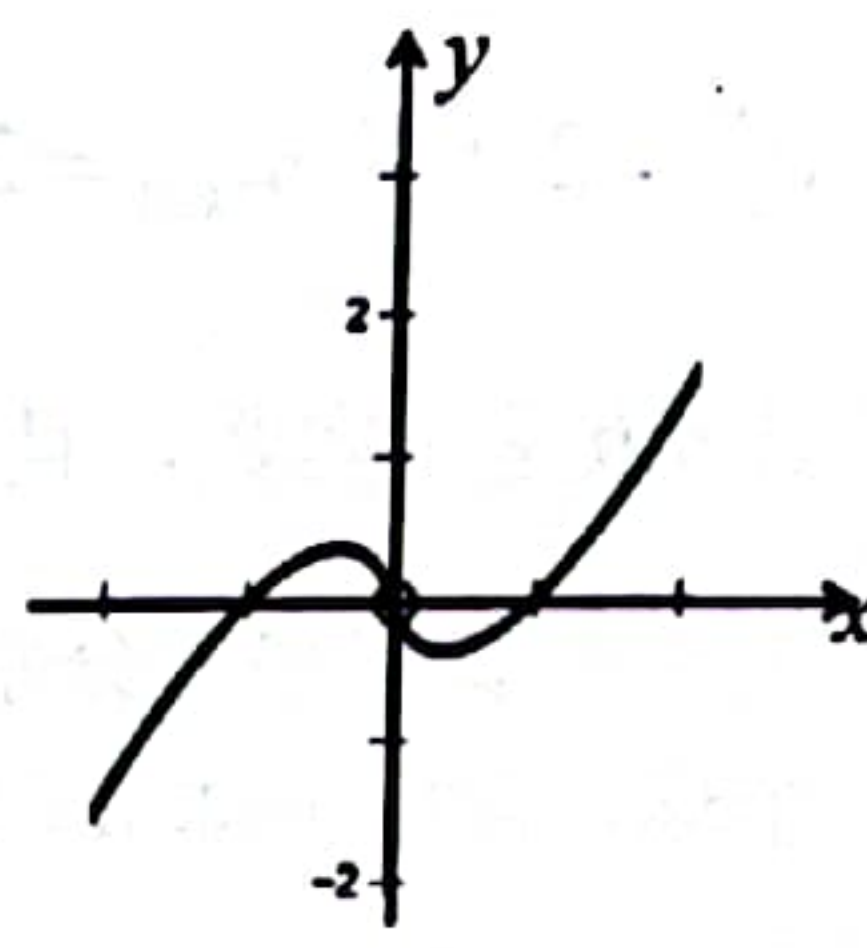
A



B



C



D

7. 设 α, β 为两个不同的平面, l, m 为两条不同的直线, 且 $m \perp \alpha, l \parallel \beta$, 则“ $l \parallel m$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 函数 $f(x) = x^2(e^{x+1} - 1)$ (e 为自然对数的底数), 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有一个极值点 B. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有极值点
C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值点 D. $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值点

9. 已知点 A 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点, $F(c, 0)$ 为椭圆的右焦点, B, E 在椭圆上, 四边形 $OABE$ 为平行四边形 (O 为坐标原点), 过直线 AE 上一点 P 作圆 $(x-c)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 的切线 PQ, Q 为切点, 若 $\triangle PQF$ 面积的最小值大于 $\frac{b^2}{8}$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围是

A. $(0, \frac{\sqrt{10}-2}{3})$

B. $(\frac{\sqrt{10}-2}{3}, 1)$

C. $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{3})$

D. $(\frac{\sqrt{5}-1}{3}, 1)$

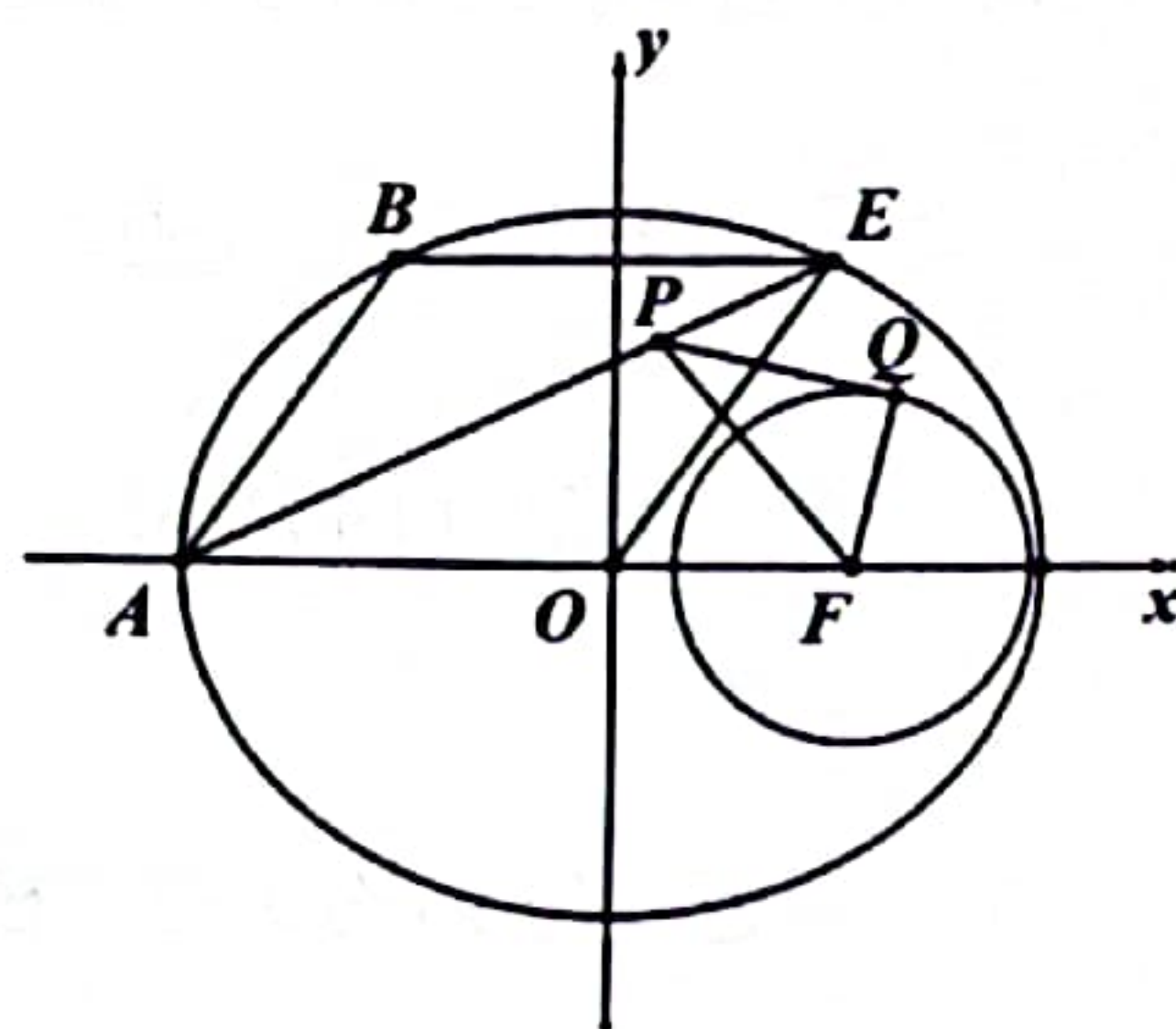
10. 已知非空集合 $A \subseteq \mathbb{R}$, 设集合 $S = \{x+y | x \in A, y \in A \text{ 且 } x \neq y\}$, $T = \{x-y | x \in A, y \in A \text{ 且 } x > y\}$. 分别用 $|A|, |S|, |T|$ 表示集合 A, S, T 中元素的个数, 则下列说法不正确的是

A. 若 $|A|=4$, 则 $|S|+|T| \geq 8$

B. 若 $|A|=4$, 则 $|S|+|T| \leq 12$

C. 若 $|A|=5$, 则 $|S|+|T|$ 可能为 18

D. 若 $|A|=5$, 则 $|S|+|T|$ 不可能为 19



二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11. 函数 $f(x) = \sin x + \cos x, x \in \mathbb{R}$ 的最小正周期是 $\triangle$ ，单调递增区间为 $\triangle$.

12. 二项式 $\left(\frac{2}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^7$ 展开式中，各项系数和为 $\triangle$ ，含 x 项的系数为 $\triangle$.

13. 圆锥被一平面所截得到一个圆台，若圆台的上底面半径为 2cm ，下底面半径为 3cm ，圆台母线长为 4cm ，则该圆锥的侧面积为 $\triangle \text{cm}^2$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ ，前 n 项和为 S_n ，若 $a_3 = 3$ ，且对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$ ，均有

$$a_{2k}^2 = 2^{a_{2k-1}+1}, a_{2k+1} = 2\log_2 a_{2k} + 1, \text{ 则 } a_1 = \triangle; S_{20} = \triangle.$$

15. 若 a, b 是正实数，且 $a+b=1$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{ab}$ 的最小值为 $\triangle$.

16. 袋子里装有编号分别为“2,3,3,4,4,5”的 6 个大小、质量相同的小球，小明从袋子中一次任取 2 个球，若每个球被取到的机会均等，记取出的 2 个小球编号之和为 X ，编号之差的绝对值为 Y ，记 $\xi = X+Y$ ，则 $P(\xi=6) = \triangle$ ； $E(\xi) = \triangle$.

17. 若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 0, |\vec{c}| = 1, |\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}| = 2$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值为 $\triangle$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本题满分 14 分) 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，向量 $\vec{m} = (\cos C, \cos A)$

与 $\vec{n} = (2b - c, a)$ 平行.

(I) 求角 A 的大小； (II) 求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

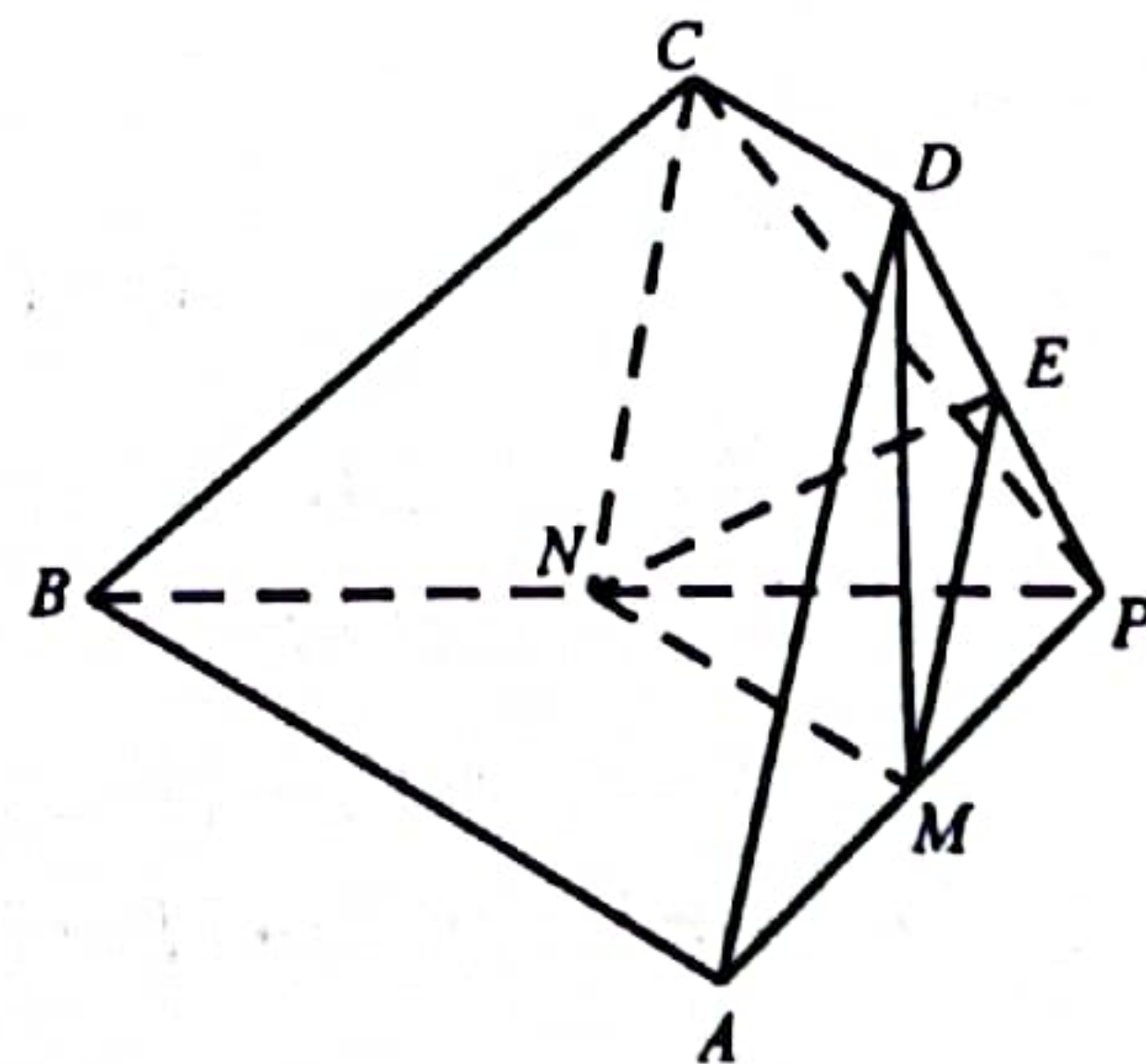
19. (本题满分 15 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD, AD=2, \angle DAB=60^\circ, \triangle APB$ 为等腰直角三角

形， $PA=PB=2\sqrt{2}$ ，过 CD 的平面分别交线段 PA, PB 于

M, N, E 在线段 DP 上 (M, N, E 不同于端点).

(I) 求证: $CD \parallel$ 平面 MNE ;

(II) 若 E 为 DP 的中点，且 $DM \perp$ 平面 APB ，求直线 PA 与平面 MNE 所成角的正弦值.



第19题图

20. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2 (n \in \mathbb{N}^*)$ 时,

$$(n-1)S_n - (n+1)S_{n-1} = \frac{1}{3}(n^3 - n).$$

(I) 证明 $\{\frac{S_n}{n(n+1)}\}$ 为等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 记数列 $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} (n \in \mathbb{N}^*)$, 记 T_n 为 $\{b_n\}$ 前 n 项的积, 证明: $T_n > n+1$.

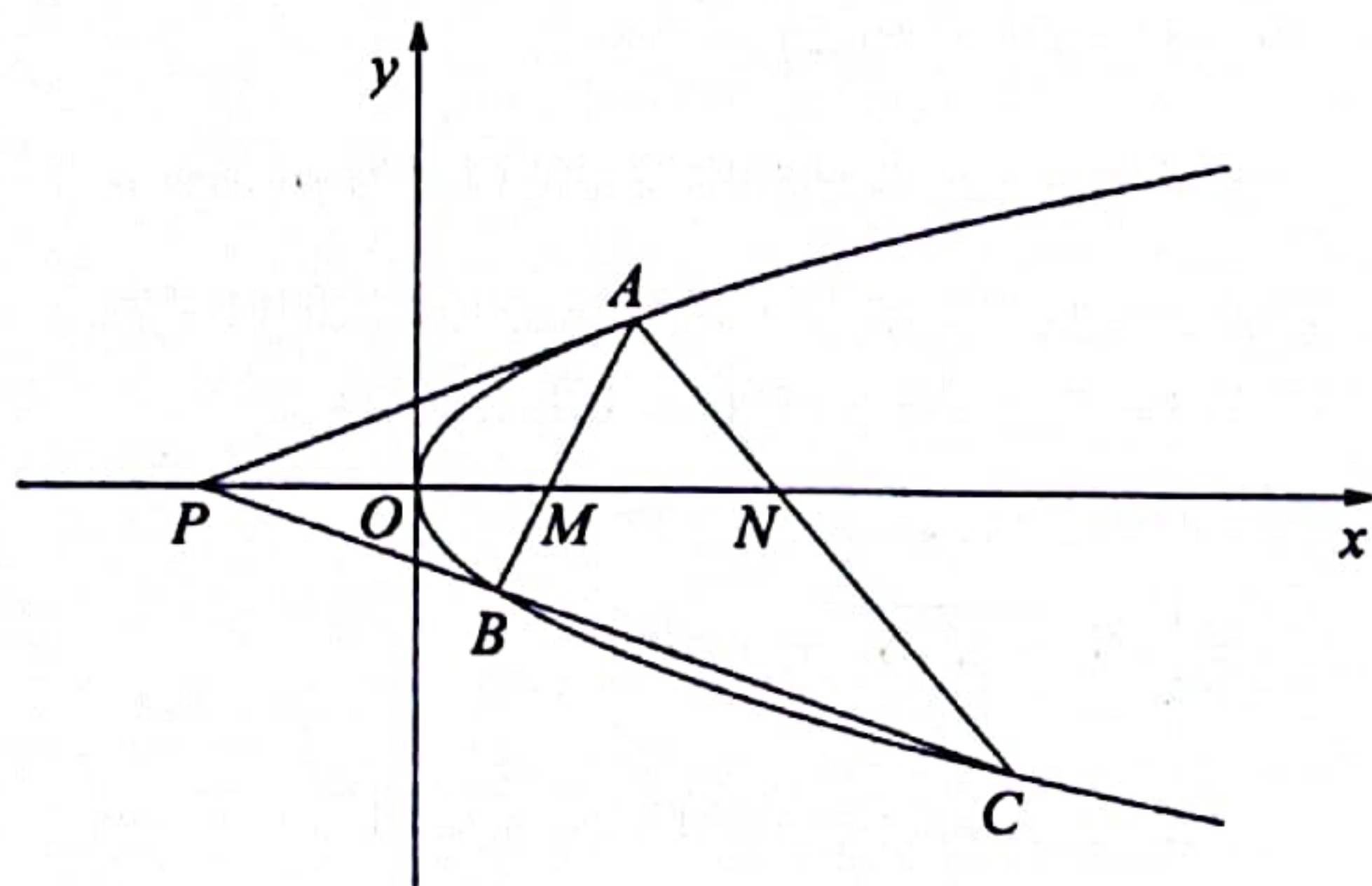
21. (本题满分 15 分) 如图, 已知抛物线 $y^2 = x$, 过点 $M(1, 0)$ 作斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 交抛物线

于 A, B 两点, 其中点 A 在第一象限, 过点 A 作抛物线的切线与 x 轴相交于点 P , 直线 PB 交抛

物线另一点为 C , 线段 AC 交 x 轴于点 N . 记 $\triangle APC$, $\triangle AMN$ 的面积分别为 S_1, S_2 .

(I) 若 $k=1$, 求 $|AB|$

(II) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值.



第21题图

22. (本题满分 15 分) 已知函数 $h(x) = (x^2 - 2x) \ln x - a(x^2 + 2x) (a \in \mathbb{R})$.

(I) 若 a 为整数, 且 $h(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的最大值;

(II) 若函数 $H(x) = h(x) + 2x - \frac{1}{2}x^2$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

证明: $x_2 > (2a+1)x_1$.