绝密★考试结束前

# 浙江省A9协作体暑假返校联考

# 高三数学试题卷

命题：普陀中学 刘小君、洪小芳　　审题：桐乡一中 沈国莲　余姚四中 沈 挺　　校审：李新华

**考生须知：**

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟；
2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

**参考公式：**

如果事件 $A,B$ 互斥那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

如果事件 $A,B$ 相互独立,那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

如果事件 $A$ 在一次试验中发生的概率为 $p$ ,那么 $n$ 次独立重复试验中事件 $A$ 恰好发生 $k$ 次的概率为

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\dots,n)$

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 $S_1,S_2$ 分别表示台体的上、下底面积，

$h$ 表示为台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 $S$ 表示柱体的底面积，$h$ 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 $S$ 表示锥体的底面积，$h$ 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 $R$ 表示球的半径

## 选择题部分

**一、选择题：**每小题4分，共40分

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\},B=\{2,3,5\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0,1,2,3,5\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{5\}$　　D．$\{2,3\}$

2．双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，则其离心率为

A．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{21}}{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

3．设实数 $x,y$ 满足 $\begin{cases}x\geq 1\\ x+y-3\leq 0\\ x-y-1\leq 0\end{cases}$，则 $2x-y$ 的最大值为

A．0　　B．2　　C．3　　D．6

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x$，则下列说法中正确的是

A．函数 $f(x)$ 有最小值和最大值　　B．函数 $f(x)$ 是周期函数

C．函数 $f(x)$ 单调递增　　D．函数 $f(x)$ 只有 3 个零点

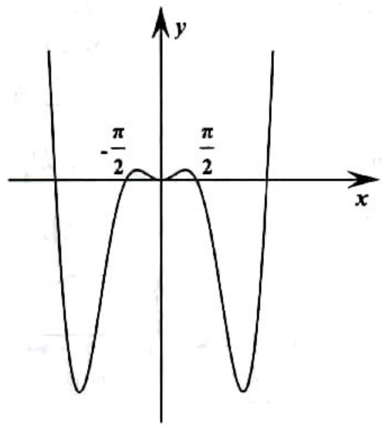
5．图象为右图的函数表达式可能为

A．$f(x)=x^2\cos x$

B．$f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$

C．$f(x)=x^2\sin|x|$

D．$f(x)=x^2+\cos x$




6．“$x>4$”是“$2^x>x^2$”的

A．充分必要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

7．已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin 2\alpha=$

A．$\dfrac{4}{5}$　　B．$\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{3}{10}$　　D．$\dfrac{1}{10}$

8．已知 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，点 $D$ 在边 $BC$ 上，且满足 $\left|\overrightarrow{BD}\right|=2\left|\overrightarrow{CD}\right|$，点 $P$ 在 $\triangle ABC$ 边上及其内部运动，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为

A．6　　B．$\dfrac{13}{2}$　　C．$\dfrac{15}{2}$　　D．$\dfrac{29}{4}$

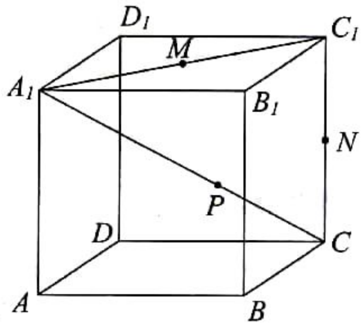
9．如图，棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $P$ 为线段 $A_1C$ 上的动点，点 $M,N$ 分别为线段 $A_1C_1,CC_1$ 的中点，则下列说法错误的是

A．$A_1P\perp AB_1$

B．三棱锥 $M-B_1NP$ 的体积为定值

C．$\angle APD_1\in\left[60^\circ,120^\circ\right]$

D．$AP+D_1P$ 的最小值为 $\dfrac{2}{3}$




10．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\ln\left(e^{a_n}-a_n\right)\left(n\in N^*\right)$，（$e$=2.71828⋯是自然对数的底数）.记数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，则

A．$0\le S_{2021}<1$　　B．$1\le S_{2021}<2$　　C．$2\le S_{2021}<3$　　D．$3\le S_{2021}<4$

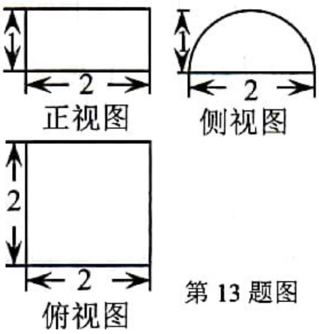
## 非选择题部分

**二、填空题：** 单空题每题 4 分，多空题每题 6 分

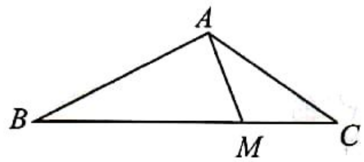
11．《孙子算经》是我国古代的数学名著，书中有如下问题："今有五等诸侯，共分橘子六十颗，人别加三颗．问：五人各得几何？"其意思为："有 5 个人分 60 个橘子，他们分得的橘子个数成公差为 3 的等差数列，问 5 人各得多少橘子．"得到橘子最少的人所得的橘子个数是__▲__，得到橘子最多的人所得的橘子个数是__▲__．

12．已知函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$，则 $D\left[D(\sqrt{2})\right]=$__▲__．

13．已知某几何体的三视图如图所示，则此几何体的表面积是__▲__，体积是__▲__．



第 13 题图



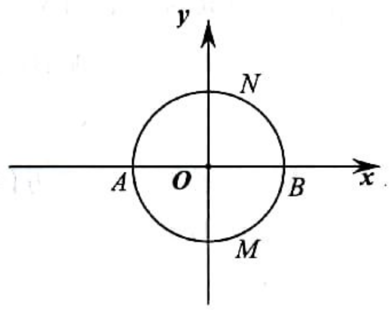
第 14 题图

14．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$BC=3$，$M$ 为边 $BC$ 上的一点，$BM=2CM$，$AM=1$，则 $\triangle AMC$ 的面积是__▲__，$\cos\angle MAC=$__▲__．

15．设 $x+2y=2$，则 $2^x+4^y$ 的最小值为__▲__，若 $x>y>0$，

则 $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{4}{x+5y}$ 的最小值为__▲__．

16．如图，设圆 $O$: $x^2+y^2=4$，现将半圆 $AMB$ 所在平面沿 $x$ 轴折起（坐标轴不动），使之与半平面 $ANB$ 成 $45^\circ$ 的二面角，若点 $M$ 为半圆 $AMB$ 上的动点，则点 $M$ 在半圆 $ANB$ 所在平面上的射影的轨迹方程为__▲__．



第 16 题图

17．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{c}|=1$ $|\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|=5$，，

则 $\left|\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right|$ 的取值范围为__▲__．

**三、解答题：** 5 小题，共 74 分

18．（14 分）设函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 $2\pi$．

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

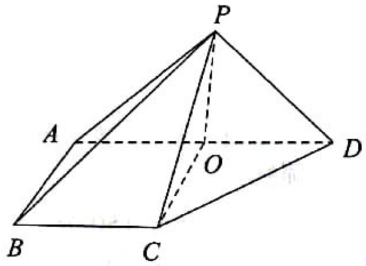
（2）求函数 $y=f^2(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的值域．

19．（15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABC$ ，$PA=PD=\sqrt{2}$ ，底面 $ABCD$ 为直角梯形，

其中，$BC\parallel AD, AB\perp AD, AD=2AB=2BC=2, O$ 为 $AD$ 中点.

（1）求证：$PO\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求直线 $PB$ 与平面 $PCD$ 所成角的正弦值.




20．（15 分）已知正项数列 $\{a_n\}\left(n\in N^*\right)$ 及其前 $n$ 项和 $S_n$ 满足：$4S_n=\left(a_n+1\right)^2$.

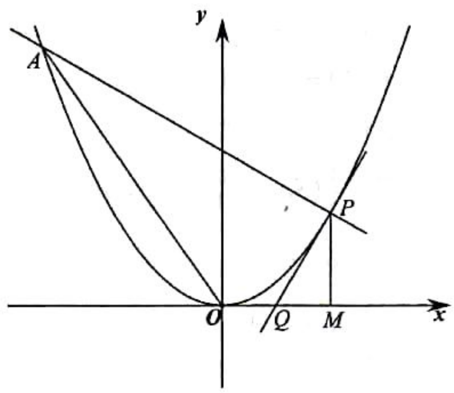
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}\left(n\in N^*\right)$，数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$.若不等式 $T_n\geq\dfrac{M}{\sqrt{a_{n+1}}}$ 对任意 $n\in N^*$ 都成立，求 $M$ 的取值范围.

21．（15 分）如图，点 $P$ 为抛物线 $x^2=2y$ 上一动点（不与 $O$ 重合），过 $P$ 作 $x$ 轴垂线交 $x$ 轴于点 $M$，抛物线在点 $P$ 处的切线 $l$ 交 $x$ 轴于点 $Q$，过 $P$ 作切线 $l$ 的垂线与抛物线相交于另一点 $A$，

（1）证明：$Q$ 为 $OM$ 的中点；

（2）当四边形 $AOQP$ 面积取得最小值时，求点 $P$ 的纵坐标.




22．（15 分）已知 $f(x)=a\ln\left(x+1\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$ ，其导函数为 $y=f'(x)$

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程；

（2）函数 $y=f(x)$ 的图象上是否存在一个定点 $(m,n)$ $\left(m,n\in(0,+\infty)\right)$，使得对于任意的 $x_0$ $\left(x_0\neq m\right)$，都有 $f(x_0)=f'(\dfrac{x_0+m}{2})(x_0-m)+n$ 成立？证明你的结论.

# 浙江省 A9 协作体暑假返校联考

# 高三数学参考答案

## 一、选择题

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | A | C | D | A | B | B | C | D | B |

10．$\because e^{a_n} \ge a_n + 1$

$\therefore a_{n+1} \ge 0$，又 $a_1$=1，$\therefore S_n \ge 1$

又 $a_{n+1} = \ln\left(e^{a_n} - a_n\right) \Rightarrow a_n = e^{a_n} - e^{a_{n+1}}$，所以 $S_n = e^{a_1} - e^{a_{n+1}} = e - e^{a_{n+1}} < e - 1$.

## 二、填空题

11．6,18

12．1

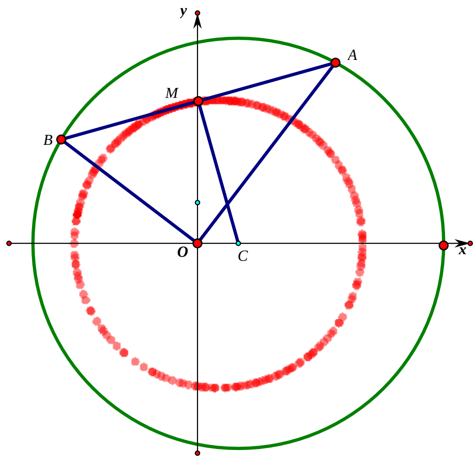
13．$4+3\pi$，$\pi$

14．$\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

15．4，$\dfrac{9}{4}$

16．$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1\left(y \ge 0\right)$

17．$\left[3,4\right]$




解析：如右图，设 $\boldsymbol{c} = (1,0)$，$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$，

$\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$，

$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}|^2 = (x_1 - 1)^2 + y_1^2 = 25$，

$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}|^2 = (x_2 - 1)^2 + y_2^2 = 25$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$，令 $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) = (x, y)$

$$x^2 + y^2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}{4} = \frac{24 + 2x_1 + 24 + 2x_2}{4} = \frac{48 + 4x}{4}$$

所以点 $M$ 的轨迹是 $(x - \dfrac{1}{2})^2 + y^2 = \dfrac{49}{4}$

## 三、解答题

18．解：

（1）$f\left(x\right) = \sin\omega x + \cos\omega x = \sqrt{2}\sin\left(\omega x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ……………2 分

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi$，所以 $\omega$=1，所以 $f\left(x\right) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ……………2 分

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x+\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}+2k\pi,(k\in Z)$

$x\in\left[-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right],(k\in Z)$

所以，$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right],(k\in Z)$ ……………3 分

（2）$y=f^2(x)=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin 2x$ ……………3 分

$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，则$2x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$， ……………2 分

则$\sin 2x\in[0,1]$，

所以函数$y=f^2(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上的值域为$[1,2]$． ……………2 分

19．解：

（1）因为$PA=PD=\sqrt{2}$，所以$PO\perp AD$ ……………2 分

又平面$PAD\perp$平面$ABC$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，

所以$PO\perp$ 平面 $ABCD$ ． ……………4 分

（2）**法 1**：如图，建立空间直角坐标系，

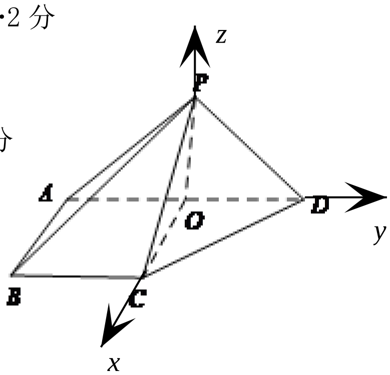
$O(0,0,0),P(0,0,1),C(1,0,0),D(0,1,0),B(1,-1,0)$， ……………2 分

$\overrightarrow{PB}=(1,-1,-1),\overrightarrow{PC}=(1,0,-1),\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$ ……………2 分

设平面$PCD$的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=x-z=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}=-x+y=0\end{cases}$ 令$x=1$，则$\vec{n}=(1,1,1)$ ……………3 分

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{PB},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{PB}||\vec{n}|}=\frac{1}{3}$． ……………2 分




**法 2**：

$V_{P-BCD}=V_{B-PCD}$ ……………2 分

$V_{P-BCD}=\frac{1}{3}\times1\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)=\frac{1}{6}$，$V_{B-PCD}=\frac{1}{3}\cdot d_{B-PCD}\cdot\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

所以$d_{B-PCD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……………5 分

所以直线$PB$与平面$PCD$所成角的正弦值为$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$． ……………2 分

其它方法酌情给分

20．解：

（1）$4S_n=\left(a_n+1\right)^2$，则 $4S_1=\left(a_1+1\right)^2$ 得 $a_1=1$ ……………1 分

当 $n\geq 2$ 时，$4S_n-4S_{n-1}=\left(a_n+1\right)^2-\left(a_{n-1}+1\right)^2$，……………2 分

得 $\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-2\right)=0$ 又 $\left\{a_n\right\}$ 是正项数列，所以 $a_n-a_{n-1}=2$， ……………2 分

所以 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列

所以 $a_n=2n-1$ ……………2 分

（2）$b_n=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$，……………2 分

所以 $T_n=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$ ……………2 分

故要使 $T_n\geq\dfrac{M}{\sqrt{a_{n+1}}}$ 对任意 $n\in N^*$ 都成立，

只需 $M\leq\dfrac{2n}{\sqrt{2n+1}}$ 对任意 $n\in N^*$ 都成立即可. ……………2 分

又 $\dfrac{2n}{\sqrt{2n+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^2-1}}\left(n\in N^*\right)$，

所以，当 $\dfrac{1}{n}=1$，即 $n=1$ 时，$\left(\dfrac{2n}{\sqrt{2n+1}}\right)_{\min}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

所以 $M\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ……………2 分

21．解：

（1）设 $P\left(x_0,y_0\right)$，则 $M\left(x_0,0\right)$，

切线 $l:y=x_0x-\dfrac{{x_0}^2}{2}$，……………3 分

$Q\left(\dfrac{x_0}{2},0\right)$，故 $x_Q=\dfrac{1}{2}x_M$，所以 $Q$ 为 $OM$ 的中点 ……………2 分

（2）$PA:y=-\dfrac{1}{x_0}x+1+\dfrac{{x_0}^2}{2}$，

$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{x_0}x+1+\dfrac{{x_0}^2}{2}\\x^2=2y\end{cases}\Rightarrow x^2+\dfrac{2}{x_0}x-2-{x_0}^2=0$，解得 $x_A=-x_0-\dfrac{2}{x_0}$ ……………2 分

$S_{AOQP}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle OPQ}$ ……………2 分（有面积公式即给分）

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{{x_0}^2}{2}\right)\left|x_0-x_A\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{x_0}{2}\right|y_0$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{{x_0}^2}{2}\right)\left|2x_0+\frac{2}{x_0}\right|+\frac{1}{8}\left|{x_0}^3\right|$

$=\left|\frac{5}{8}{x_0}^3+\frac{3}{2}x_0+\frac{1}{x_0}\right|$ ……………3 分

不妨设 $x_0>0$，则 $S_{AOQP}=\frac{5}{8}{x_0}^3+\frac{3}{2}x_0+\frac{1}{x_0}$，考虑函数 $f(x)=\frac{5}{8}x^3+\frac{3}{2}x+\frac{1}{x}$，

$f'(x)=\frac{15}{8}x^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{15x^4+12x^2-8}{8x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x^2=\frac{-6+2\sqrt{39}}{15}$ .

$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{-6+2\sqrt{39}}{15}}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\sqrt{\frac{-6+2\sqrt{39}}{15}},0\right)$ 上单调递增.

故当 $x=\sqrt{\frac{-6+2\sqrt{39}}{15}}$ 时，$f(x)$ 有最小值.

当四边形 $AOQP$ 面积最小时，点 $A$ 的纵坐标为 $y_0=\frac{{x_0}^2}{2}=\frac{-3+\sqrt{39}}{15}$ ……………3 分

22．解：

（1）$f(x)=\ln(x+1)+\frac{x^2}{2}-x$，$f(2)=\ln 3$，……………1 分

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x-1$，$f'(2)=\frac{4}{3}$，……………2 分

切线方程：$y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}+\ln 3$ ……………2 分

（2）假设存在定点 $(m,n)$ 满足条件.

$f(x_0)=f'(\frac{x_0+m}{2})(x_0-m)+n\Rightarrow\frac{f(x_0)-n}{x_0-m}=f'(\frac{x_0+m}{2})$

$n=f(m)=a\ln(m+1)+\frac{m^2}{2}-m$， ……………2 分

$f'(x)=\frac{a}{x+1}+x-1$

$$\frac{f(x_0)-n}{x_0-m}=\frac{a\left[\ln(x_0+1)-\ln(m+1)\right]+\frac{1}{2}\left({x_0}^2-m^2\right)-(x_0-m)}{x_0-m}=\frac{a\left[\ln(x_0+1)-\ln(m+1)\right]}{x_0-m}+\frac{x_0+m}{2}-1$$

$f'(\frac{x_0+m}{2})=\frac{a}{\frac{x_0+m}{2}+1}+\frac{x_0+m}{2}-1$

故 $\frac{\ln(x_0+1)-\ln(m+1)}{x_0-m}=\frac{2}{x_0+m+2}$，……………2 分

变形得$\ln\dfrac{x_0+1}{m+1}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_0+1}{m+1}-1\right)}{\dfrac{x_0+1}{m+1}+1}$

令$t=\dfrac{x_0+1}{m+1}$，（$t>0$），则$\ln t=\dfrac{2(t-1)}{t+1}$， ……………3 分

考虑函数$g(t)=\ln t-\dfrac{2t-2}{t+1}$

$g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0$，

所以$g(t)$在$(0,+\infty)$单调递增，又$g(1)=0$，故$g(t)=0$只有唯一解$t=1$.又因为$m\neq x_0$，所以$t\neq 1$，故不存在定点$(m,n)$满足条件. ……………3 分