

数学试题参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，共 40 分。

1. A 2. C 3. B 4. A 5. B 6. D 7. A 8. C 9. C 10. D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 1480 12. $[0, +\infty)$, $(-1, 0)$ 13. -18, 71 14. $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$

15. $\frac{\pi}{4}$ 16. $\frac{1}{4}$, $\frac{23}{16}$ 17. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。

18. 本题主要考查三角函数及其变换、正弦定理、余弦定理等基础知识，同时考查数学运算等素养。满分 14 分。

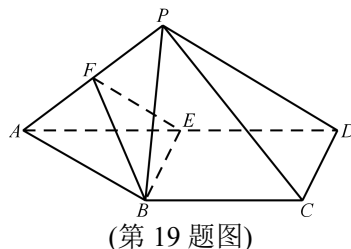
(I) 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,
代入并化简得 $c = 2b \cos A + 2b \cos B$,
由正弦定理得 $\sin C = 2 \cos A \sin B + \sin 2B$,
由 $A + B + C = \pi$ 得 $\sin C = \sin(A + B)$,
代入并化简得 $\sin(A - B) = \sin 2B$.

(II) 由 $A + B + C = \pi$ 得 $A \in (0, \pi - B)$,
当 B 是锐角时, $A = 3B$,
解得 $B \in (0, \frac{\pi}{4})$;
当 B 是直角时, 不合题意;
当 B 是钝角时, $A = 3B - 2\pi$,
解得 $B \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$.

故角 B 的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$.

19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查直观想象和数学运算等素养。满分 15 分。

(I) 取 AD, AP 中点 E, F , 连接 BE, BF, EF .
由 $AB = PB$, $PA \perp PD$ 得 $PA \perp BF$, $PA \perp EF$,
所以 $PA \perp$ 平面 BEF .
由 $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$ 知四边形 $BCDE$ 是平行四边形, 则 $BE \parallel CD$.
由 $BE \parallel CD$, $EF \parallel PD$ 得 平面 $BEF \parallel$ 平面 PCD ,
所以 $PA \perp$ 平面 PCD .



(II) 方法一:

由 $AB = PB = BC = CD = 1$, $AD = 2$ 知四边形 $ABCD$ 是以 $\angle A = 60^\circ$ 的等腰梯形.
连接 AC , 则 $AC \perp CD$, $CD \perp$ 平面 PAC , 于是点 P 在底面 $ABCD$ 内的射影在 AC 上.
取 AC 中点 G , 则 $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 于是当 $PG \perp$ 底面 $ABCD$ 时, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大.

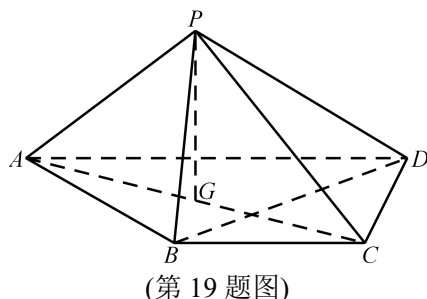
连接 BD , 则 $V_{P-ABD} = \frac{1}{3} S_{ABD} h_1 = \frac{1}{4}$.

计算得 $PA = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $PD = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 则 $S_{PAD} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 故

$$V_{B-PAD} = \frac{1}{3} S_{PAD} h_2 = \frac{1}{4},$$

解得 $h_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 则 $\sin \theta = \frac{h_2}{|PB|} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

因此, 直线 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.



(II) 方法二:

由 $AB = PB = BC = CD = 1$, $AD = 2$ 知四边形 $ABCD$ 是以 $\angle A = 60^\circ$ 的等腰梯形.
连接 AC , 则 $AC \perp CD$, $CD \perp$ 平面 PAC , 于是点 P 在底面 $ABCD$ 内的射影在 AC 上.

取 AC 中点 G , 则 $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 于是当 $PG \perp$ 底面 $ABCD$ 时, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大.

如图, 以 G 为原点, 分别以射线 GB, GC, GP 为 x, y, z 轴的正半轴, 建立空间直角坐标系 $G-xyz$.

由题意得

$$G(0, 0, 0), A(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), B(\frac{1}{2}, 0, 0), D(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), P(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

所以 $\overrightarrow{PA} = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{PB} = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{3}, 0).$

设平面 PAD 的法向量

$$\mathbf{n} = (x, y, z),$$

由

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases},$$

得

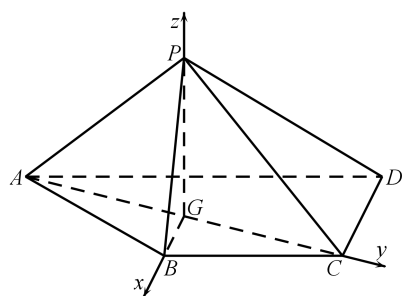
$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases},$$

取

$$\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -1),$$

则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PB}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$



(第 19 题图)

因此, 直线 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

20. 本题主要考查等差数列、等比数列等基础知识, 同时考查数学运算和逻辑推理等素养. 满分 15 分.

(I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$.

由于

$$\frac{a_{b_{n+1}}}{a_{b_n}} = q^{b_{n+1} - b_n} = q^d,$$

故数列 $\{a_{b_n}\}$ 是首项为 a_{b_1} , 公比为 q^d 的等比数列.

易知 $q \neq 1$, 则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q} = 3 \left[\frac{1 - (q^d)^n}{1 - q^d} \right] = 3(a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_n}),$$

解得

$$q = d = 2,$$

因此

$$a_n = 2^{n-1}, b_n = 2n - 1.$$

(II) 由 $b_n = 2n - 1$ 得

$$S_n = n^2,$$

所以

$$c_n = 2^{n-1} - n^2.$$

由于

$$c_{n+1} - c_n = 2^{n-1} - 2n - 1,$$

则

$$c_2 - c_1, c_3 - c_2, c_4 - c_3, c_5 - c_4 < 0,$$

且当 $n \geq 5$ 时, $2^{n-1} - 2n - 1 = 4 \times (1+1)^{n-3} - 2n - 1 > 2n - 9 > 0$,

故当 $n = 1, 2, 3, 4$ 时, $c_{n+1} < c_n$; 当 $n \geq 5$ 时, $c_{n+1} > c_n$.

因此数列 $\{c_n\}$ 中的最小项是

$$c_5 = -9.$$

21. 本题主要考查抛物线的几何性质, 直线与抛物线、圆的位置关系等基础知识, 同时考查数学抽象、数学运算与逻辑推理等素养. 满分 15 分.

(I) 由题意知抛物线的准线方程是 $x = -1$.

(II) 由题意可设直线 $AB: x = my - n (m, n > 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

将直线 AB 的方程代入抛物线 $y^2 = 4x$ 得

$$y^2 - 4my + 4n = 0,$$

所以

$$y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = 4n,$$

点 C 的坐标 (x_3, y_3) 满足

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 2m, x_3 = my_3 - n = 2m^2 - n.$$

由 $|AB| = 2|CN|$ 得

$$\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|=\sqrt{m^2+1}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=y_1+y_2,$$

代入并化简得 $m^4-m^2n-n=0$.

又 $M(-n,0)$, $N(2m^2-n,0)$, 由勾股定理得

$$|PQ|=2\sqrt{(2m)^2-(2m^2-n)^2}=\frac{2}{m}\sqrt{4n-m^2n^2},$$

则 $|MN|\cdot|PQ|=4m\sqrt{4n-m^2n^2}=4\sqrt{4-(2-m^2n)^2}\leq 8$,

当且仅当 $m^2n=2$, 即 $m^6-2m^2-2=0$ 时等号成立.

由于 $m^2-n>0$,

解得 $m>\sqrt[4]{2}$.

记 $f(m)=m^6-2m^2-2$, $m>\sqrt[4]{2}$, 注意到

$$f(\sqrt[4]{2})\cdot f(2)<0,$$

则存在 $m\in(\sqrt[4]{2},2)$ 符合题意.

因此, $|MN|\cdot|PQ|$ 的最大值是 8.

22. 本题主要考查函数的单调性, 导数的运算及其应用, 同时考查数学抽象、数学运算与逻辑推理等素养. 满分 15 分.

(I) 当 $a=0$, $b=-1$ 时, $f(x)=\ln^2x+2ex$,

则 $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+ex)$.

设 $g(x)=\ln x+ex$,

易知 $g(x)$ 单调递增, 且 $g(\frac{1}{e})=0$, 则

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值 $f(\frac{1}{e})$	单调递增

所以 $f(x)\geq f(\frac{1}{e})=3$.

(II) (i) 由于 $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}+2ax+b$,

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}+ax$, $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+a$, 则 $h'(x)$ 有两个变号零点 x_1, x_2 ($x_1<x_2$).

记 $h''(x)=[h'(x)]'$, 则 $h''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$,

所以

x	$(0, e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$
$h''(x)$	-	0	+
$h'(x)$	单调递减	极小值 $h'(e^{\frac{3}{2}})$	单调递增

因此 $x_1\in(e, e^{\frac{3}{2}})$, $x_2\in(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

此时

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	单调递增	极大值 $h(x_1)$	单调递减	极小值 $h(x_2)$	单调递增

将 $\frac{\ln x_1-1}{x_1^2}=\frac{\ln x_2-1}{x_2^2}=a$ 代入 $h(x_1)$, $h(x_2)$ 得

$$h(x_1)=\frac{2\ln x_1-1}{x_1}, h(x_2)=\frac{2\ln x_2-1}{x_2}.$$

设 $\varphi(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^2}$,

所以

x	$(0, e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	单调递增	极大值 $\varphi(e^{\frac{3}{2}})$	单调递减

由 $b \in (-2h(x_1), -2h(x_2))$ 解得

$$b \in (-4e^{\frac{3}{2}}, 0).$$

(ii) 由题意得 $f'(s) = 0$, 即 $\frac{2\ln s}{s} + 2as + b = 0$,

将 $\frac{2\ln s}{s} + 2as + b = 0$ 代入 $f(s)$ 得

$$f(s) = \ln^2 s - 2\ln s - as^2.$$

设 $p(x) = \ln^2 x - 2\ln x - ax^2$, 则

$$p'(x) = \frac{2}{x}(\ln x - 1 - ax^2).$$

设 $q(x) = \ln x - 1 - ax^2$, 则 $q'(x) = \frac{1 - 2ax^2}{x}$,

结合 $p'(x_1) = p'(x_2) = 0$ 及 $a > 0$ 得

$$p'(x) > 0 (x_1 < x < x_2).$$

又 $x_1 < s < x_2$, 故 $p(s) > p(x_1) = \ln^2 x_1 - 3\ln x_1 + 1 > -\frac{5}{4}$.

解析&审核：水球高考命题研究组