

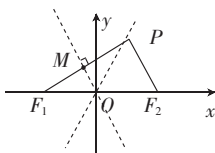
2020~2021 学年高三百校 9 月联考

数学参考答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是正确的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	A	D	A	B	A	D	C	B

8. D 解:如图所示,因为双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, $|OF_1| = c$,所以直线 PF_1 的方程为 $y = \frac{a}{b}(x+c)$.由原点 $O(0,0)$ 到直线 $PF_1: ax - by + ac = 0$ 的距离 $d = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} = a$,可得 $|OM| = a$, $|F_1M| = b$. 又根据几何图形的性质,可得 $|F_1P| = 2b$, $|F_2P| = 2a$,根据双曲线的定义,可得 $|F_1P| - |F_2P| = 2a = 2b - 2a$,所以 $b = 2a$,故双曲线的渐近线为 $y = \pm 2x$.



9. C $\because a_n = 2^n, b_n = 2^{a_n} = 2^{2^n},$

$$\begin{aligned} \therefore \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \left(1 + \frac{1}{b_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^3}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^3}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2}{1 - \frac{1}{2^2}} < \frac{4}{3} < 2 \end{aligned}$$

10. B 设 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \vec{d} = \overrightarrow{DA},$

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理的向量式,可得 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2}$;同理,在 $\triangle ABC$ 中,可得 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD}^2}{2}$.

所以在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \frac{(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2) - (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2)}{2},$

即 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2) - (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2)}{2} = \frac{5}{2}.$

二、填空题:本大题共 7 小题,单空每题 4 分,双空每题 6 分,共 36 分.

11. $\frac{209}{64}$ 12. 1024; -10 13. $-\frac{\sqrt{7}}{3}; \frac{1}{8}$ 14. $6\sqrt{2}; \sqrt{2}$

15. $\frac{1}{10}; -2$ 16. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 17. $\left[-1, -\frac{1}{8}\right]$

16. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 令 $f(x) = ax^2 - bx + c = a(x+1)(x-m) = a[x^2 + (1-m)x - m]$, 则 $b = -a(1-m), c = -am,$

因为 $f(-1) = a + b + c = 0$, 且 $a < b < c$, 所以 $a < 0 < c$, 即 $a < -a(1-m) < -am$, 可得 $1 >$

$m-1 > -m$, 解得 $m \in (\frac{1}{2}, 2)$.

17. $[-1, -\frac{1}{8}]$ 因为 $M_{\min}=1$, 函数 $f(x)=|x+a|+|x^2+b|, x \in [0, 1]$,

且 $f(x)=|x+a|+|x^2+b| \geq |x^2+x+a+b|, x \in [0, 1]$,

$f(x)=|x+a|+|x^2+b| \geq |x^2-x-a+b|, x \in [0, 1]$,

所以 $M=\max\{|a+b|, |a+b+2|, |b-a|, |b-a-\frac{1}{4}|\}$,

由题意可得, 存在 a , 对于任意的 b , 使得 M 的最小值为 1,

由于在数轴上的点 $-a-2$ 和点 $-a$ 之间的距离恰好为 2,

因此要使 M 的最小值为 1, 则必有 $-a-2 \leq a$, 且 $a+\frac{1}{4} \leq -a$,

解得 $a \in [-1, -\frac{1}{8}]$.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算过程.

18. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $b \sin A = a \sin B$,

又由 $b \sin A = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$, 可得 $a \sin B = a \cos(B - \frac{\pi}{6})$, 即 $\sin B = \cos(B - \frac{\pi}{6})$, (3 分)

即 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B$, 可得 $\tan B = \sqrt{3}$, 又因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. (7 分)

(2) 法一: 如图, 延长 BD 到 E , 使 $DE=BD$, 连接 AE, CE , 则四边形 $ABCE$ 为平行四边形, 且 $BE=2\sqrt{3}$, $\angle BAE = \frac{2\pi}{3}$, $AB=c$, $AE=BC=a$,

在 $\triangle BAE$ 中, 由余弦定理可得, $(2\sqrt{3})^2 = a^2 + c^2 - 2accos \frac{2\pi}{3}$,

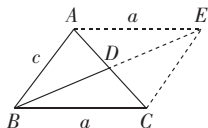
即 $a^2 + c^2 + ac = 12$, 可得 $(a+c)^2 - ac = 12$, 即 $ac = (a+c)^2 - 12$, (10 分)

由基本不等式可得, $ac = (a+c)^2 - 12 \leq (\frac{a+c}{2})^2$,

即 $\frac{3}{4}(a+c)^2 \leq 12$, 即 $(a+c)^2 \leq 16$, 可得 $a+c \leq 4$. (当且仅当 $a=c=2$ 时取等号) (12 分)

又由 $AE+AB > BE$, 可得 $a+c > 2\sqrt{3}$,

故 $a+c$ 的取值范围是 $(2\sqrt{3}, 4]$. (14 分)



法二: 也可以用中线向量+基本不等式解决, 酌情给分.

19. 解: (1) 连接 AC 交 DB 于 E , 连接 GE (图略), 易知 $GE \parallel AM$.

因为 $GE \not\subset$ 平面 AMN , $AM \subset$ 平面 AMN , 所以 $GE \parallel$ 平面 AMN . (3 分)

$MN \parallel BE$, 同理可证 $BE \parallel$ 平面 AMN .

又因为 $BE \cap GE = E$, 所以平面 $GBD \parallel$ 平面 AMN . (7 分)

(2) (几何法) (图略) 连接 ME , 由菱形 $ABCD$ 与菱形 $DBNM$ 全等, 且 $\angle MDB = \angle DAB$, 可得 $AD=AB=BD$, $DM=BD=MB$, 所以 $ME \perp BD$,

又平面 $ABCD \perp$ 平面 $DBNM$ 且相交于 BD , 所以 $ME \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $ME \perp BD$, $AC \perp BD$, 且 $AC \cap ME = E$, 所以 $BD \perp$ 平面 AMC , 又因为 $BD \subset$ 平面 GBD , 所以平面 $GBD \perp$ 平面 AMC ,

过点 C 作 $CF \perp GE$, 则 $CF \perp$ 平面 GBD , 连接 BF , 由 $AD \parallel BC$, 可知 $\angle CBF$ 即为直线 AD 与平面 GBD 所成的角. (10 分)

由(1)平面 $GBE \parallel$ 平面 AMN , 可得 $\angle CBF$ 即为直线 AD 与平面 AMN 的所成角. (12 分)

由 $AD = AB = BD$, 可得 $\angle DAB = 60^\circ$.

在直角三角形 MAE 中, $ME = AE$, 所以 $\angle MAE = 45^\circ$, 则 $\angle GEC = 45^\circ$, 所以 $CF = \frac{\sqrt{2}}{2}CE$.

又在直角三角形 DEC 中, $\angle EDC = 60^\circ$, 所以 $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$,

易知 $CF = \frac{\sqrt{2}}{2}CE = \frac{\sqrt{6}}{4}BC$, 所以 $\sin \angle CBF = \frac{CF}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

故直线 AD 与平面 AMN 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. (15 分)

(2)(坐标法)(图略)连接 ME , 由菱形 $ABCD$ 与菱形 $DBNM$ 全等, 且 $\angle MDB = \angle DAB$, 可得 $AD = AB = BD$, $DM = BD = MB$, 所以 $ME \perp BD$.

又平面 $ABCD \perp$ 平面 $MNBD$, 且平面 $ABCD \cap$ 平面 $DBNM = BD$, 所以 $ME \perp$ 平面 $ABCD$,

则可以以向量 $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EM}$ 的方向分别作为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 令 $AB = 2$, 则 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $M(0, 0, \sqrt{3})$, $B(0, 1, 0)$, $N(0, 2, \sqrt{3})$, (10 分)

设平面 AMN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{AN} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} -x + z = 0 \\ -\sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$,

令 $x = 1$, 得 $y = 0$, $z = 1$, 所以平面 AMN 的法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$, (12 分)

设直线 AD 与平面 AMN 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

故直线 AD 与平面 AMN 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. (15 分)

20. (1)解: 由 $a_3 + 9$ 是 a_1, a_5 的等差中项, 可得 $a_1 + a_5 = 2a_3 + 18$, $\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3 + 18 = 42$, 解得 $a_3 = 8$, (3 分)

由 $a_1 + a_5 = 34$, 可得 $\frac{8}{q^2} + 8q^2 = 34$, 解得 $q^2 = 4$ 或 $q^2 = \frac{1}{4}$,

又 $\because q > 1$, $\therefore q = 2$. (6 分)

故 $a_n = 2^n$. (7 分)

(2)证明: $\because b_n = \frac{1}{(\frac{3}{2})^n + 1} < \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} = (\frac{2}{3})^n$, (11 分)

$\therefore S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n < \frac{2}{5} + \frac{4}{13} + (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^4 + \dots + (\frac{2}{3})^n = \frac{46}{65} + \frac{8}{9} - \frac{8}{9} \cdot (\frac{2}{3})^{n-2}$

$\leq \frac{21}{13}, n \geq 3$

又 $\because S_1 = \frac{2}{5} < \frac{21}{13}, S_2 = \frac{46}{65} < \frac{21}{13}, \therefore S_n < \frac{21}{13}$. (15 分)

21. 解: (1) 由已知可得, $p=2, F(1,0), \therefore c=1, e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \therefore a=2, b^2=a^2-c^2=3,$

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=4x$, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. (5 分)

(2) 设直线 l 的方程为 $my=x+n(n \neq -1),$

由 $\begin{cases} y^2=4x \\ my=x+n \end{cases}$, 消去 x , 可得 $y^2-4my+4n=0,$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=4n \end{cases},$

因为 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{(y_1y_2)^2}{16} + y_1y_2 = \frac{16n^2}{16} + 4n = n^2 + 4n = -3,$ (7 分)

所以 $n=-3$ 或 $n=-1$ (舍去), 所以直线 l 的方程为 $my=x-3$. (9 分)

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \\ my=x-3 \end{cases}$, 消去 x , 可得 $(3m^2+4)y^2+18my+15=0,$

设 $C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$, 则 $\begin{cases} y_C+y_D=-\frac{18m}{3m^2+4} \\ y_Cy_D=\frac{15}{3m^2+4} \end{cases},$ (11 分)

设直线 l 与 x 轴交于点 E ,

所以 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} |EF| \cdot |y_C - y_D| = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_C - y_D| = |y_C - y_D|$

$= \sqrt{(y_C + y_D)^2 - 4y_Cy_D} = \sqrt{\left(-\frac{18m}{3m^2+4}\right)^2 - \frac{60}{3m^2+4}}$
 $= \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3m^2-5}}{3m^2+4}. (13 \text{ 分})$

令 $\sqrt{3m^2-5}=t(t \geq 0)$, 则 $m^2 = \frac{t^2+5}{3}$, 所以 $S(t) = 4\sqrt{3} \cdot \frac{t}{t^2+9} = \frac{4\sqrt{3}}{t+\frac{9}{t}} \leq \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 当且

仅当 $t=3$, 即 $m = \pm \frac{\sqrt{42}}{3}$ 时, 等号成立, 即 $\triangle CDE$ 的面积取最大值, 最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (15 分)

22. (1) 解: $f(x) = e^x - ax^2 = e^x (1 - ax^2 e^{-x})$, 设函数 $h(x) = 1 - ax^2 e^{-x}$.

函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点, 即函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

当 $a \leq 0$ 时, $h(x) > 0$, $h(x)$ 没有零点;

当 $a > 0$ 时, $h'(x) = ax(x-2)e^{-x}$.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值.

① 若 $h(2) > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点;

② 若 $h(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点;

③ 若 $h(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 由于 $h(0) = 1, h(0) \cdot h(2) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有一个零点,

当 $x > 0$ 时, 易证 $\frac{e^x}{x^2} > 1$, 所以 $h(4a) = 1 - \frac{16a^3}{e^{4a}} = 1 - \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} > 1 - \frac{16a^3}{(2a)^4} = 1 - \frac{1}{a} > 0$, 所以 $h(2) \cdot h(4a) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(2, 4a)$ 上也有一个零点, 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个零点.

综上, 当函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个零点时, $a > \frac{e^2}{4}$.

注: 采用分离参数的方法进行求解也可以.

(2) 证明: $g(x) = e^x(e^x - x - 1)$, 故 $g'(x) = e^x(2e^x - x - 2)$,

令 $\varphi(x) = 2e^x - x - 2$, $\varphi'(x) = 2e^x - 1$, 令 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = \ln \frac{1}{2}$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\ln \frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\ln \frac{1}{2}) = 2e^{\ln \frac{1}{2}} - \ln \frac{1}{2} - 2 = \ln 2 - 1 < 0$, $\varphi(-2) = 2e^{-2} - (-2) - 2 = \frac{2}{e^2} > 0$,

所以 $\varphi(-2) \cdot \varphi(\ln \frac{1}{2}) < 0$, 所以由函数的零点存在性定理及函数 $\varphi(x)$ 的单调性知, 方程

$\varphi(x) = 0$ 在 $(-2, \ln \frac{1}{2})$ 内有唯一实根, 设为 x_0 , 则 $2e^{x_0} - x_0 - 2 = 0$, 从而 $\varphi(x)$ 有两个零点 x_0 和 0 ,

所以可知 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 .

由 $2e^{x_0} - x_0 - 2 = 0$, 可得 $e^{x_0} = \frac{x_0 + 2}{2}$, $x_0 \neq -1$,

所以 $g(x_0) = e^{x_0}(e^{x_0} - x_0 - 1) = \frac{x_0 + 2}{2}(\frac{x_0 + 2}{2} - x_0 - 1) = \frac{1}{4}(-x_0)(2 + x_0) \leq$

$$\frac{1}{4} \frac{(-x_0 + 2 + x_0)^2}{4} = \frac{1}{4},$$

取等号不成立, 所以 $g(x_0) < \frac{1}{4}$.

又因为 $-2 < x_0 < \ln \frac{1}{2}$, 且函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增,

所以 $g(x_0) > g(-2) = e^{-2}[e^{-2} - (-2) - 1] = e^{-4} + e^{-2} > \frac{2}{e^3}$.

故 $\frac{2}{e^3} < g(x_0) < \frac{1}{4}$ 得证.