

2020~2021 学年高三百校 9 月联考

数 学

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

参考公式:

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

锥体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

柱体的体积公式

$$V=Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

台体的体积公式

$$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h 表示台体的高

选择题部分(共 40 分)

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是正确的.

1. 已知集合 $P=\{x|1<x<3\}$, $Q=\{y|2<y<4\}$, 则 $P\cup Q=$

- A. $\{x|1<x<2\}$ B. $\{x|2<x<3\}$
C. $\{x|1<x<4\}$ D. $\emptyset$

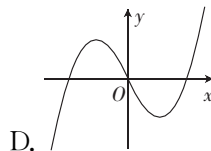
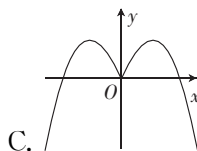
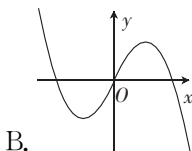
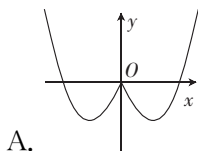
2. 复数 $z=2-3i$ (i 为虚数单位)的虚部为

- A. 2 B. 3 C. -3 D. $-3i$

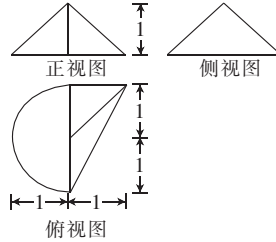
3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y+1>0 \\ x-y>0 \end{cases}$, 则 $z=x+y$ 的取值范围是

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

4. 函数 $y=-2x\cos x$ 的部分图象是



5. 一个空间几何体的三视图(单位: cm)如图所示, 则该几何体的体积(单位: cm^3)为



- A. $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}$ B. $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{6}$ C. $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6}$ D. $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}$
6. “空间三个平面 α, β, γ 两两相交”是“三个平面的三条交线互相平行”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 已知 $m > n > 0, a > 0$ 且 $a \neq 1$, 设 $M = a^m + a^{-m}, N = a^n + a^{-n}$, 则
- A. $M > N$ B. $M = N$ C. $M < N$ D. $(M - N)(a - 1) > 0$
8. 已知点 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 右支上的一点, F_1 是双曲线的左焦点, 且双曲线的一条渐近线恰是线段 PF_1 的中垂线, 则该双曲线的渐近线方程是

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm x$ C. $y = \pm \sqrt{3}x$ D. $y = \pm 2x$
9. 已知数列 $\{a_n\}, a_n = 2^n, b_n = 2^{a_n}, M = \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \left(1 + \frac{1}{b_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_n}\right), n \in \mathbf{N}^*$, 则
- A. $M < 1$ B. $M > \frac{4}{3}$ C. $M < 2$ D. $M > 2$
10. 已知向量 $|a| = 2, |b| = 3, |c| = 4, |d| = 4$, 且 $a + b + c + d = 0$, 则 $(a + b) \cdot (b + c) =$
- A. 4 B. $\frac{5}{2}$ C. 2 D. 1

非选择题部分(共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 单空每题 4 分, 双空每题 6 分, 共 36 分.

11. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且点 (a_n, a_{n+1}) 在抛物线 $x^2 = 4y$ 上, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 ▲ .
12. 在二项式 $(x - 2)^{10}$ 的展开式中, 常数项为 ▲ , 若 $(x - 2)^{10} = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \cdots + a_{10}(x - 1)^{10}$, 则 a_9 等于 ▲ .
13. 已知角 α 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$, 则 $\tan \alpha =$ ▲ , $\cos 2\alpha =$ ▲ .

14. 已知在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M, N, P 分别是棱 CC_1, C_1D_1, A_1D_1 的中点, 则过点 M, N, P 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的平面多边形的周长为 ▲ , 该截面与底面所成锐二面角的正切值为 ▲ .
15. 在一袋中有 20 个大小相同的球, 其中标记数字 0 的有 10 个, 标记数字 n 的有 n 个 ($n=1, 2, 3, 4$). 现从袋中任取一球, X 表示所取球标记的数字, 则 $P(X=2)=$ ▲ , 若 $Y=2X+m$, 且 $E(Y)=1$, 则实数 $m=$ ▲ .
16. 已知函数 $f(x)=ax^2-bx+c$ ($a < b < c$) 有两个零点分别为 -1 和 m , 则实数 m 的取值范围是 ▲ .
17. 已知函数 $f(x)=|x+a|+|x^2+b|$, $x \in [0, 1]$, 设 $f(x)$ 的最大值为 M , 若 $M_{\min}=1$, 则实数 a 的取值范围为 ▲ .

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

18. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $2b \sin A = \sqrt{3} a \cos B + a \sin B$.

(1) 求角 B 的大小;

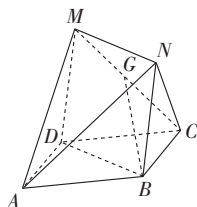
(2) 设点 D 是 AC 的中点, 若 $BD = \sqrt{3}$, 求 $a+c$ 的取值范围.

19. (本小题满分 15 分)

如图, 已知平面 $ABCD \perp$ 平面 $DBNM$, 菱形 $ABCD$ 与菱形 $DBNM$ 全等, 且 $\angle MDB = \angle DAB$, 点 G 为 MC 的中点.

(1) 求证: 平面 $GBD \parallel$ 平面 AMN .

(2) 求直线 AD 与平面 AMN 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 15 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$, 且 $a_1 + a_3 + a_5 = 42$, $a_3 + 9$ 是 a_1, a_5 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{3^n + a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 求证: $S_n < \frac{21}{13}$.

21. (本小题满分 15 分)

设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F , 点 F 到抛物线的准线的距离为 2, 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点也为 F , 离心率为 $\frac{1}{2}$.

- (1)求抛物线方程和椭圆方程;
- (2)若经过点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3$ (O 为坐标原点), 直线 l 与椭圆交于 C, D 两点, 求 $\triangle CDF$ 的面积的最大值.

22. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$ ($e=2.718\cdots$).

(1)若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点,求实数 a 的取值范围.

(2)设函数 $g(x)=e^x[f(x)+ax^2-1-x]$,证明: $g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 ,且 $\frac{2}{e^3}<g(x_0)<\frac{1}{4}$.