

高三数学试题参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合的交集运算,考查运算求解能力.

因为 $A=(0,3], B=(-2,2)$, 所以 $A \cap B=(0,2)$.

2. B 【解析】本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

因为 $z=1+2i+\frac{1+2i}{2-i}=1+3i$, 所以复数 z 的虚部为 3.

3. C 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

$\because \sin(\theta-\pi)=\frac{4}{5}, \therefore \sin \theta=-\frac{4}{5}, \therefore \cos \theta=\pm \frac{3}{5}$. 又 $\because \tan \theta < 0, \therefore \cos \theta=\frac{3}{5}, \therefore \sin 2\theta=2 \sin \theta \cos \theta=-\frac{24}{25}$.

4. A 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的思想.

画出可行域(图略)知,当 $l: z=2x+y$ 平移到过点 $(2,1)$ 时, z 取得最大值,最大值为 5.

5. B 【解析】本题考查平均数与方差,考查数据分析能力.

设这个班有 n 个同学,分数分别是 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$,

假设第 i 个同学的成绩录入了两次,第一次计算时,总分是 $(n+1)\bar{x}$, 方差为

$$s^2=\frac{1}{n+1}[(a_1-\bar{x})^2+(a_2-\bar{x})^2+\dots+(a_{i-1}-\bar{x})^2+2(a_i-\bar{x})^2+(a_{i+1}-\bar{x})^2+\dots+(a_n-\bar{x})^2];$$

第二次计算时, $\bar{x}_1=\frac{(n+1)\bar{x}-\bar{x}}{n}=\bar{x}$, 方差为

$$s_1^2=\frac{1}{n}[(a_1-\bar{x})^2+(a_2-\bar{x})^2+\dots+(a_{i-1}-\bar{x})^2+(a_i-\bar{x})^2+(a_{i+1}-\bar{x})^2+\dots+(a_n-\bar{x})^2]=\frac{n+1}{n}s^2.$$

故有 $\bar{x}=\bar{x}_1, s^2 < s_1^2$.

6. D 【解析】本题考查线面垂直的判定、性质定理,考查逻辑推理能力.

结合甲、乙、丙三人的说法可知,当 $\alpha \perp \beta, m \perp n, n \parallel l$ 正确时,直线 m, n 为异面直线. 故选 D.

7. B 【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换,考查运算求解能力.

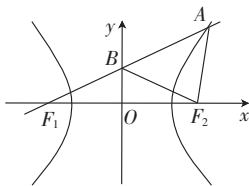
由正弦定理可知, $\sin B=\sin A \cos C+2 \sin C \cos A$, 则 $\cos A \sin C=2 \sin C \cos A$, 则 $a=\frac{1}{2}$.

8. B 【解析】本题考查双曲线的定义以及几何性质,考查数形结合思想和运算求解的能力.

由对称性可知 $BF_2=BF_1$, 所以 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $6a$, 即 $AF_1+AF_2=6a$, 又 $AF_1-AF_2=2a$, 所以 $AF_1=4a, AF_2=2a$. 因为 B 为 AF_1 的中点, 所以 $AB=BF_1=2a$, 则 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 所以 $\angle ABF_2=\frac{\pi}{3}, \angle F_1BF_2=\frac{2\pi}{3}, \angle F_1BO=\frac{\pi}{3}$.

又因为 $OF_1=c$, 所以在 $\text{Rt}\triangle F_1BO$ 中, $\sin \angle F_1BO=\frac{OF_1}{BF_1}=\frac{c}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\frac{c}{a}=\sqrt{3}, \frac{b}{a}=\sqrt{2}$, 即双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm \sqrt{2}x$.



9. C 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理能力.

设点 (x, y) 是函数 $y=\lg x, x \geq 1$ 图象上任意一点, 它关于点 $(1, 0)$ 的对称点为 (x', y') ,

则 $\begin{cases} x+x'=2, \\ y+y'=0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x=2-x', \\ y=-y', \end{cases}$ 代入 $y=\lg x$, 得 $-y'=\lg(2-x'), \therefore y'=-\lg(2-x'), x' \leq 1$.

$\therefore$ 函数 $y=\lg x, x \geq 1$ 的图象与函数 $y=-\lg(2-x), x \leq 1$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称,

即 $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x \geq 1, \\ -\lg(2-x), & x < 1 \end{cases}$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 易知 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

10. C 【解析】本题考查三角函数的图象, 考查数形结合的思想.

$$\text{令 } \theta = \omega x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3}\right], 2\pi \leq \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3} < 3\pi, \text{ 则 } \frac{28}{9} \leq \omega < \frac{40}{9}.$$

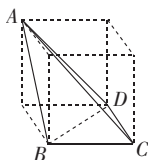
$$\text{因为 } f(0) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{即 } \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\text{即 } \omega = \frac{8}{9} + \frac{8}{3}k \text{ 或 } \omega = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}k, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } \omega \text{ 为 } \frac{32}{9} \text{ 或 } 4.$$

11. A 【解析】本题考查四面体的外接球, 考查空间想象能力.

由 $AB = AD = BD = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}CD = \sqrt{2}$, 可知 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形, $\triangle ABD$ 为等边三角形, $AC = \sqrt{3}$, 所以四面体 $ABCD$ 可补成正方体, 如图所示. AC 即为外接球直径 $2R$, 则 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而外接球表面积 $S = 4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi$.



12. B 【解析】本题考查导数的应用, 函数与方程, 考查数形结合与化归与转化的数学思想.

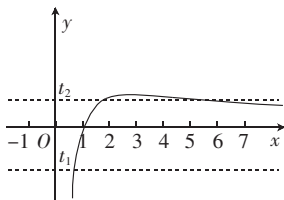
$$\text{由方程 } \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x + x} + m = 0, \text{ 可得 } \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{\frac{\ln x}{x} + 1} + m = 0.$$

$$\text{令 } \frac{\ln x}{x} = t, \text{ 则有 } t + \frac{1}{t+1} + m = 0, \text{ 即 } t^2 + (m+1)t + m+1 = 0.$$

$$\text{令函数 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

作出图象如下:



要使关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x + x} + m = 0$ 有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$,

结合图象可得关于 t 的方程 $t^2 + (m+1)t + m+1 = 0$ 一定有两个实根 t_1, t_2 ($t_1 < 0 < t_2 < \frac{1}{e}, t \neq -1$),

$$\text{且 } \frac{\ln x_1}{x_1} = t_1, \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_3}{x_3} = t_2, t_1 + t_2 = -(m+1), t_1 t_2 = m+1,$$

$$\text{所以 } m+1 < 0, \frac{1}{e^2} + \frac{m+1}{e} + m+1 > 0, \text{ 解得 } -1 - \frac{1}{e^2 + e} < m < -1.$$

$$\text{故 } \left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right)} = (1 - t_1)(1 - t_2) = 1 - t_1 - t_2 + t_1 t_2 = 2m + 3 \in \left(1 - \frac{2}{e^2 + e}, 1\right).$$

13. $(-\infty, 0]$ 【解析】本题考查命题的否定, 考查逻辑推理能力.

若原命题为假命题, 则其否定“ $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > m$ ”为真命题, m 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

14. 2 【解析】本题考查平面向量的数量积公式, 考查数形结合的思想.

设 O 为 AC 与 BD 的交点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AM}| \cos \angle MAO = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AO}| = 2$.

15. $\frac{4}{7}$ 【解析】本题考查排列组合, 考查逻辑推理能力.

这 8 支球队分为两组, 则一共有 $\frac{C_8^3 C_4^4}{A_2^2} = 35$ (种),

2 支种子队不在同一组, 则有 $\frac{C_6^3 C_3^3}{A_2^2} A_2^2 = 20$ (种), 故所求概率为 $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$.

16. 2 【解析】本题考查抛物线的定义以及几何性质, 考查数形结合思想和运算求解的能力.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} y_1^2 = 8x_1, \\ y_2^2 = 8x_2, \end{cases}$ 所以 $y_1^2 - y_2^2 = 8x_1 - 8x_2$, 所以 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 + y_2}$.

取 AB 的中点 $M'(x_0, y_0)$, 分别过点 A, B 作准线 $x = -2$ 的垂线, 垂足分别为 A', B' . 因为 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, $\angle AMB = 90^\circ$, 所以 $|MM'| = \frac{1}{2} |AB| = \frac{1}{2} (|AF| + |BF|) = \frac{1}{2} (|AA'| + |BB'|)$. 因为 M' 为 AB 的中点, 所以 MM' 平行于 x 轴. 因为 $M(-2, 2)$, 所以 $y_0 = 2$, 则 $y_1 + y_2 = 4$, 即 $k = 2$.

17. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $3a_3 = 4a_1 + 4a_2$, 可得 $3q^2 - 4q - 4 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = -\frac{2}{3}$ (舍去).

..... 2 分

因为 $S_6 = 126$, 所以 $S_6 = \frac{a_1(1-2^6)}{1-2} = 126$, 解得 $a_1 = 2$, 4 分

所以 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 6 分

(2) $b_n = \frac{2}{\log_2 a_{2n-1} \cdot \log_2 a_{2n+1}} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$, 9 分

所以 $T_n = (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$ 12 分

18. (1) 证明: $\because ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC , 则 $BB_1 \perp BC$ 1 分

$\because$ 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 A_1ABB_1 , 平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $A_1ABB_1 = BB_1$,

$\therefore CB \perp$ 平面 A_1ABB_1 , $\therefore B_1D \perp BC$ 2 分

$\because BB_1 = 2AB = 2$, $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, $\therefore B_1D = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$,

$\therefore BB_1^2 = BD^2 + B_1D^2$, $\therefore B_1D \perp BD$ 4 分

又 $BD \cap BC = B$, $\therefore B_1D \perp$ 平面 BDC 5 分

(2) 解: $\because CC_1 \perp$ 平面 ABC , 二面角 $A-CC_1-B$ 的平面角为 $\angle ACB$, 即 $\angle ACB = 45^\circ$, $\therefore BC = 1$ 7 分

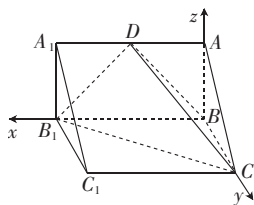
以 B 为原点, $\overrightarrow{BB_1}$ 的方向为 x 轴正方向, $\overrightarrow{BC}$ 的方向为 y 轴正方向, $\overrightarrow{BA}$ 的方向为 z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$,

则 $B_1(2, 0, 0), C(0, 1, 0), D(1, 0, 1), \overrightarrow{B_1C} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{B_1D} = (-1, 0, 1)$,

$\overrightarrow{BA} = (0, 0, 1)$ 为平面 B_1BCC_1 的一个法向量. 9 分

设平面 DB_1C 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ -x + z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 得 $y = 2, z = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1,$

$2, 1)$, $\cos \langle \overrightarrow{BA}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{BA}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以二面角 $D-B_1C-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 12 分



19. 解: (1) 设点 $F(-c, 0), A(a, 0), P(-c, y_0)$, 则 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 则 $y_0^2 = \frac{b^4}{a^2}$, 2 分

又直线 PA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{\frac{b^2}{a}-0}{-c-a} = -\frac{1}{2}$, 3 分

则 $2c^2+ac-a^2=0$, 即 $2e^2+e-1=0$, 解得 $e=\frac{1}{2}$, 所以椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$ 5 分

(2) 因为直线 PA 与 y 轴交于点 E(0,1), 所以直线 PA 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+1$, 则 A(2,0),

所以 $a=2, c=1, b=\sqrt{3}$, 即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 6 分

当直线 l 的斜率不存在时, MN 的方程为 $x=0$, 此时 $\frac{|EM|}{|EN|}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$, 不符合条件舍去. 7 分

当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程为 $y=kx+1$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{EM}=(x_1, y_1-1), \overrightarrow{EN}=(x_2, y_2-1)$.

因为 $\overrightarrow{EM}+3\overrightarrow{EN}=\mathbf{0}$, 所以 $x_1=-3x_2$ 8 分

联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$, 所以 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-8k}{3+4k^2}, \\ x_1x_2=\frac{-8}{3+4k^2}, \end{cases}$ 9 分

将 $x_1=-3x_2$ 代入得 $\begin{cases} -2x_2=\frac{-8k}{3+4k^2}, \\ 3x_2^2=\frac{8}{3+4k^2}, \end{cases}$ 所以 $3(\frac{4k}{3+4k^2})^2=\frac{8}{3+4k^2}$, 11 分

所以 $k^2=\frac{3}{2}, k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x+1$ 或 $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+1$ 12 分

20. 解: (1) 由题意, 知 X 的值可能为 1, 2, 3. 1 分

$P(X=1)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$, 2 分

$P(X=3)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$, 3 分

$P(X=2)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{20}$, 4 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{5}$

..... 5 分

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{20}+3\times\frac{1}{5}=\frac{39}{20}$ 6 分

(2) 若游戏进行 2 轮且小李获胜的概率为 $P=\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{45}$, 8 分

若游戏进行 3 轮且小李获胜的概率为 $P=(\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{3}{5})\times\frac{1}{45}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times(\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{6})\times\frac{1}{3}$

$$\times \frac{2}{6} = \frac{187}{8100}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以小李获胜的概率为 } \frac{1}{45} + \frac{187}{8100} = \frac{367}{8100}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. (1) \text{解: } f(x) = \ln(x+1), f(0) = 0, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \text{ 则 } f'(0) = 1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以曲线 } y=f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处的切线方程为 } y=x. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{证明: 因为 } 0 < a \leq 1, \text{ 所以 } \ln(x+a) \leq \ln(x+1),$$

$$\text{又 } x \in [0, +\infty), \text{ 所以 } xf(x) \leq x \ln(x+1), \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{易证得 } \ln(x+1) \leq x, \text{ 所以 } xf(x) \leq x^2. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{x^2}{e^x}, x \in [0, +\infty), h'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}. \text{ 当 } x \in [0, 2) \text{ 时, } h'(x) > 0, h(x) \text{ 单调递增; 当 } x \in (2, +\infty) \text{ 时,}$$

$$h'(x) < 0, h(x) \text{ 单调递减. } h(x)_{\max} = h(2) = \frac{4}{e^2} < \frac{2}{3}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以, 当 } 0 < a \leq 1 \text{ 时, 对一切 } x \in [0, +\infty), \text{ 都有 } 3xf(x) < 2e^x \text{ 成立.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{解: (1) 由曲线 } C \text{ 的参数方程 } \begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}) \text{ 得曲线 } C \text{ 的普通方程为 } (x-1)^2 + y^2 = 2, \text{ 得 } x^2 +$$

$$y^2 - 2x - 1 = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{曲线 } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2 - 2\rho\cos\theta - 1 = 0. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{将直线 } l \text{ 的极坐标方程代入曲线 } C \text{ 的极坐标方程, 得 } \rho^2 - 2\rho\cos\alpha - 1 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{设 } A(\rho_1, \alpha), B(\rho_2, \alpha),$$

$$\text{则 } \rho_1 \cdot \rho_2 = -1 < 0, \text{ 所以 } |OA| + |OB| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{4\cos^2\alpha + 4} = \sqrt{6},$$

$$\text{则 } \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } y = \pm x. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$23. (1) \text{解: 由题可得 } 2|x-1| < 3x-4, \text{ 所以 } -(3x-4) < 2(x-1) < 3x-4, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } x > 2, \text{ 所以不等式 } f(x) < 2x-4 \text{ 的解集为 } (2, +\infty). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{证明: } f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 1, \\ -3x+2, & x < 1, \end{cases} \text{ 则 } m = f(1) = -1, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{则 } (a+b) + (b+c) = 1, \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}\right)[(a+b) + (b+c)] = 2 + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} \geq 4,$$

$$\text{当且仅当 } a=c \text{ 时, 取等号.} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$