



金太阳大联考

2021~2022 年度河南省高三入学考试 数学(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{3-x}{x} \geq 0\}$, $B = \{x | x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $(0, 3]$ B. $(-2, 0)$ C. $(0, 2)$ D. $[0, 2)$
2. 已知复数 $z = 1 + 2i + \frac{1+2i}{2-i}$, 则 z 的虚部为
 A. 3 B. 1 C. -1 D. 2
3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0, \\ x+y-3 \leq 0, \\ x-3y+1 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值为
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
4. 已知 $\sin(\theta - \pi) = \frac{4}{5}$, 且 $\tan \theta < 0$, 则 $\sin 2\theta =$
 A. $\frac{24}{25}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $-\frac{24}{25}$ D. $-\frac{12}{25}$
5. 某班统计某次数学测验的平均分与方差(成绩不完全相同), 计算完后才发现有位同学的分录入两次, 只好重算一次. 已知第一次计算所得平均分和方差分别为 $\bar{x}, s^2$, 第二次计算所得平均分和方差分别为 $\bar{x}_1, s_1^2$, 若此同学的得分恰好为 $\bar{x}$, 则
 A. $\bar{x} = \bar{x}_1, s^2 = s_1^2$ B. $\bar{x} = \bar{x}_1, s^2 < s_1^2$
 C. $\bar{x} = \bar{x}_1, s^2 > s_1^2$ D. $\bar{x} < \bar{x}_1, s^2 = s_1^2$
6. 甲、乙、丙做同一道题: 已知 α, β 是两个不同的平面, m, n, l 是三条不同的直线, 且满足 $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = l, \dots$. 甲说: “ $\alpha \perp \beta$ ”, 乙说: “ $m \perp n$ ”, 丙说: “ $n \parallel l$ ”, 如果三人说的均是正确的, 以下判断正确的是
 A. $m \parallel \beta$
 B. $n \perp \alpha$
 C. 直线 m, l 不一定垂直
 D. 直线 m, n 为异面直线
7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b = a \cos C + 2a \cos A$, 则 $a =$
 A. $\frac{1}{4}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2



8. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线 C 的右支在第一象限的交点为 A , 与 y 轴的交点为 B , 且 B 为 AF_1 的中点, 若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $6a$, 则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y = \pm\sqrt{3}x$

B. $y = \pm\sqrt{2}x$

C. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

D. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x \geq 1, \\ -\lg(2-x), & x < 1, \end{cases}$ 则

A. $f(x)$ 存在最小值

B. $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

10. 已知定义在 $[0, \frac{3\pi}{4}]$ 上的函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 有且仅有三个零点, $f(0) + f(\frac{3\pi}{4}) = 0$, 则 ω 的值为

A. $\frac{11}{3}$ 或 3

B. $\frac{32}{9}$ 或 4

C. $\frac{32}{9}$ 或 3

D. $\frac{11}{3}$ 或 4

11. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB=AD=BD=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{3}$, 则该四面体外接球的表面积为

A. 9π

B. 6π

C. 3π

D. 12π

12. 若关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x + x} + m = 0$ 有三个不相等的实数解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$,

则 $(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}) \sqrt{(1 - \frac{\ln x_2}{x_2})(1 - \frac{\ln x_3}{x_3})}$ 的取值范围为

A. $(1 - \frac{2}{e^2 + e}, 1)$

B. $(1 - \frac{2}{e^2 + e}, 1 + \frac{2}{e^2 + e})$

C. $(\frac{2}{e^2 + e}, 1)$

D. $(0, \frac{2}{e^2 + e})$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若“ $\exists x \in \mathbb{R}, e^x \leq m$ ”为假命题, 则实数 m 的取值范围是 .

14. 在菱形 $ABCD$ 中, $|AC|=2$, 点 M 为线段 BD 上一点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} =$.

15. 某足球比赛共有 8 支球队参赛, 其中有 2 支种子队, 以抽签的方式将这 8 支球队平均分为两组, 2 支种子队不在同一组的概率为 .

16. 已知点 $M(-2, 2)$ 和抛物线 $C: y^2 = 8x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 则 $k =$.



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $3a_3 = 4a_1 + 4a_2$, $S_6 = 126$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

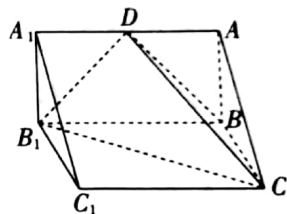
(2) 若 $b_n = \frac{2}{\log_2 a_{2n-1} \cdot \log_2 a_{2n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 A_1ABB_1 , D 为棱 AA_1 的中点, $BB_1 = 2AB = 2$.

(1) 证明: $B_1D \perp$ 平面 BDC .

(2) 若二面角 $A-CC_1-B$ 为 45° , 求二面角 $D-B_1C-B$ 的余弦值.



19. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点和右顶点分别为 F, A , P 是椭圆 C 上一点, $PF \perp$

x 轴, 直线 PA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) 若直线 PA 与 y 轴交于点 $E(0, 1)$, 过 E 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, $\overrightarrow{EM} + 3\overrightarrow{EN} = \mathbf{0}$, 求直线 l 的方程.



20. (12 分)

有一种双人游戏,游戏规则如下:每人各分得一个装有 4 个球(2 个白球和 2 个黑球)的布袋,并轮流到对方袋中摸出 1 球,若摸出的是白球,则放回对方的袋中,若摸出的是黑球,则放入自己袋中,两人各摸取一次算为一轮.

(1)求第一轮比赛后先摸球的人的袋中黑球个数 X 的分布列与期望;

(2)小李和小张准备玩这种游戏,约定最多玩 3 轮,每轮游戏由小李先摸球,并且规定每轮结束后,一方袋中若有 4 个黑球,则该方获胜并结束游戏,否则进行下一轮摸球游戏,求小李获胜的概率.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+a)$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

(2)证明:当 $0 < a \leq 1$ 时,对一切 $x \in [0, +\infty)$,都有 $3xf(x) < 2e^x$ 成立.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数).以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$).

(1)求曲线 C 的极坐标方程;

(2)已知直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点,若 $|OA| + |OB| = \sqrt{6}$,求直线 l 的直角坐标方程.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = 2|x-1| - x$.

(1)求不等式 $f(x) < 2x-4$ 的解集.

(2)已知函数 $f(x)$ 的最小值为 m ,且 a, b, c 都是正数, $a+2b+c=-m$,证明: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq 4$.

