

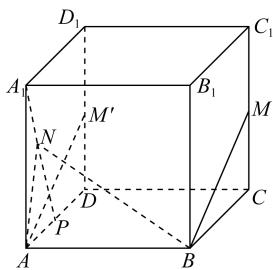


参考答案及解析

河北衡水中学 2021 届全国高三第一次联合考试 · 数学

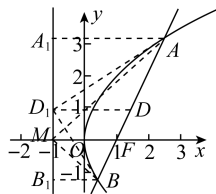
一、选择题

1. C 【解析】因为 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\} = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3\}$.
2. B 【解析】由 $z = 1 - i$, 得 $\frac{z}{1-z} = \frac{1-i}{i} = -1 - i$, 则 $\left| \frac{z}{1-z} \right| = |-1-i| = \sqrt{2}$.
3. D 【解析】至少有 2 名女生参加包括 2 名女生 4 名男生与 3 名女生 3 名男生两种情况, 所以不同选派方案种数为 $C_3^2 C_6^4 + C_3^3 C_6^3 = 65$.
4. B 【解析】由斐波那契数列的特点, 可得此数列只有第 $3k (k \in \mathbb{N}^*)$ 项为偶数, 所以前 2 020 项中偶数的个数为 673.
5. C 【解析】设 a 与 b 的夹角为 θ , 由 $|a+b| = |2a-b|$ 得 $a \cdot b = \frac{1}{2} a^2$, 所以 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{1}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$.
6. A 【解析】若合并检测, 检测次数取值为 1, 21, 对应的概率分别为 $(1-p)^{20}$, $1 - (1-p)^{20}$, 数学期望为 $1 \times (1-p)^{20} + 21[1 - (1-p)^{20}]$, 由 $20 = 1 \times (1-p)^{20} + 21[1 - (1-p)^{20}]$, 解得 $p = 1 - \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{20}}$.
7. C 【解析】将 $x = 110$, $G = 17.5$ 代入 $G = 2.004e^{0.0197x}$ 得 $17.5 = 2.004e^{0.0197 \times 110}$ ①, 将 $G = 35$ 代入 $G = 2.004e^{0.0197x}$, 得 $35 = 2.004e^{0.0197x}$ ②. 由 ② ÷ ① 得 $2 = e^{0.0197x - 0.0197 \times 110}$, 即 $0.0197(x - 110) = \ln 2$, 解得 $x \approx 145$.
8. B 【解析】如图, 取 DD_1 的中点为 M' , 易知 $AM' \parallel BM$. 点 P 为 AD 的中点, 则在正方形 AA_1D_1D 中, $A_1P \perp AM'$, 即 $A_1P \perp BM$. 所以, 点 N 的轨迹为线段 A_1P . 易知 $\triangle ABN$ 为直角三角形, 当 $NA \perp A_1P$ 时, NA 取最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 此时 $\triangle ABN$ 面积最小, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



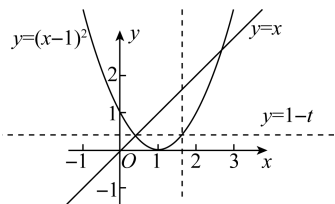
二、选择题

9. AD 【解析】 $\sin\left(2\alpha - \frac{3}{5}\pi\right) = -\sin\left(2\alpha + \frac{2}{5}\pi\right) = -2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right)$. 因为 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = \pm \frac{4}{5}$, 所以 $\sin\left(2\alpha - \frac{3}{5}\pi\right) = \pm \frac{24}{25}$.
10. BCD 【解析】抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$, 过焦点的弦中通径最短, 所以 $|AB|$ 最小值为 $2p = 4$, 故 A 不正确; 如图, 设线段 AB 中点为 D , 过点 A, B, D 作准线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1, D_1 , 由抛物线定义可知 $|AA_1| = |AF|$, $|BB_1| = |BF|$, 所以 $|DD_1| = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|) = \frac{1}{2}|AB|$, 所以以线段 AB 为直径的圆与直线 $x = -1$ 相切, 故 B 正确; 设 AB 所在直线的方程为 $x = ny + 1$, 由 $\begin{cases} x = ny + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 消去 x , 得 $y^2 - 4ny - 4 = 0$, 所以 $y_1 y_2 = -4$, $x_1 x_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{16} = 1$, 故 C 正确; 又 $y_1 + y_2 = 4n$, $k_{AM} + k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} = \frac{y_1(x_2 + 1) + y_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{y_1(ny_2 + 2) + y_2(ny_1 + 2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{2ny_1 y_2 + 2(y_1 + y_2)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = 0$, 故 D 正确.



11. AD 【解析】由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数得 $f(x) = -f(-x)$, 图象关于直线 $x = 1$ 对称可得 $f(-x) = f(2+x)$, 所以 $f(2+x) = -f(x)$, $f(4+x) = -f(2+x) = f(x)$, 故 A 正确; 无法判断单调性, 故 B, C 错误; $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ 是奇函数, 且 $f(2-x) = f(x)$, 故 D 正确.

12. ABC 【解析】不等式 $(2x-x^2-t)(1-t-x) \leq 0$ 可化为 $[(1-t)-(x-1)^2][(1-t)-x] \leq 0$, 问题转化为: 存在实数 t , 使得在区间 $(0, s]$ 上, 函数 $y=(x-1)^2$ 与函数 $y=x$ 的图象恒在直线 $y=1-t$ 的两侧, 如图画出函数 $y=(x-1)^2$ 与函数 $y=x$ 的图象,



由 $\begin{cases} y=x, \\ y=(x-1)^2, \end{cases}$ 得 $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (舍去),

从而得 $t = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 由抛物线的对称性知 $y=1-t$ 与 $y=(x-1)^2$ 图象的右边交点的横坐标为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 故在区间 $(0, \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$ 上, 函数 $y=(x-1)^2$ 与函数 $y=x$ 的图象恒在直线 $y=1-t$ 的两侧, 所以实数 s 的取值范围为 $(0, \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$. 即选项 ABC 符合题意.

三、填空题

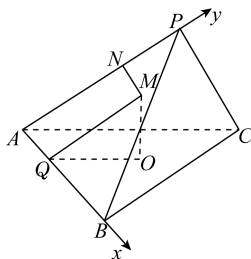
13. 4 【解析】由题意得 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 又 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 所以 $|PF_1| = 4, |PF_2| = 2$. 又 $|F_1F_2| = 2\sqrt{5}$, 所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 所以 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |PF_1| \cdot |PF_2| = 4$.

14. $a > \sqrt{ab} > b$ 【解析】由 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} > \ln \frac{b}{a}$, 得 $\frac{1}{a^2} + \ln a > \frac{1}{b^2} + \ln b$. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^2-2}{x^3}$, 当 $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $a > b$, 所以 $a > \sqrt{ab} > b$.

15. $\frac{1}{5}$ 【解析】随机地填涂了至少一个选项共有 $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ 种涂法, 得分的涂法为 3 种, 故他能得分的概率为 $\frac{1}{5}$.

16. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 【解析】如图, 过 M 作 $MN \perp PA$ 于 N , $MO \perp$ 平面 ABC 于 O , 过 O 作 $OQ \perp AB$ 于 Q , 连接 MQ , 则 $\angle MQO$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角, 由 $\angle MQO = 30^\circ$

得 $MQ = 2MO$. 又 $MO = MN$, 所以 $MQ = 2MN$, 在 $\triangle PAB$ 中, 以 AB 所在直线为 x 轴, AP 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 则直线 AM 的方程为 $y = 2x$, 直线 PB 的方程为 $4x + 3y - 12 = 0$, 所以直线 AM 与 PB 的交点坐标为 $R(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$, 所以 M 的轨迹为线段 AR , 长度为 $\sqrt{(\frac{6}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.



四、解答题

17. 解: 选择条件①:

因为对任意 $n > 1, n \in \mathbb{N}^*$, 满足 $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$, 所以 $S_{n+1} - S_n = S_n - S_{n-1} + 2$, (4分)

所以 $a_{n+1} - a_n = 2$. (6分)

因为无法确定 a_1 的值,

所以 $a_2 - a_1$ 不一定等于 2.

所以数列 $\{a_n\}$ 不一定是等差数列. (10分)

选择条件②:

由 $S_{n+1} - 2 = S_n + a_n$, 得 $S_{n+1} - S_n - a_n = 2$,

即 $a_{n+1} - a_n = 2, n \in \mathbb{N}^*$. (6分)

又因为 $a_2 = 4$, 所以 $a_1 = 2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其公差为 2. (8分)

因此, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$. (10分)

选择条件③:

因为 $S_n = na_{n+1} - n(n+1)$,

所以 $S_{n-1} = (n-1)a_n - n(n-1) (n \geq 2)$, (2分)

两式相减得 $a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - 2n (n \geq 2)$,

即 $a_{n+1} - a_n = 2 (n \geq 2)$. (6分)

又 $S_1 = a_2 - 2$, 即 $a_2 - a_1 = 2$,

所以 $a_{n+1} - a_n = 2, n \in \mathbb{N}^*$,

又 $a_2 = 4, a_2 - a_1 = 2$, 所以 $a_1 = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, (8分)

所以 $a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$. (10分)

18. 解: (1) 由题意, 当 $x=0$ 时计算其他数据的平均数为

$$\frac{1}{30} \times (45 \times 1 + 55 \times 7 + 65 \times 11 + 85 \times 9 + 95 \times 2) = 70,$$

$$\text{故原平均数应满足 } 71 \leq \frac{2 \cdot 100 + 75x}{30 + x} < 72, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } 7.5 \leq x < 20, x \in \mathbf{Z},$$

所以件数在 $[70, 80)$ 的人数的取值范围为 $8 \leq x < 20$,

$$x \in \mathbf{Z}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 因为件数 $X \sim N(70, 10^2)$,

$$\text{所以 } P(X \leq 50) \approx (1 - 0.96) \times \frac{1}{2} = 0.02, \quad (9 \text{ 分})$$

所以估计 1 500 人中每天制造产品件数小于等于 50 的人数为 $0.02 \times 1\,500 = 30$. (12 分)

19. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $AB = 3$, $BC = 1$, 由

$$\begin{aligned} \text{余弦定理得 } AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \angle ABC \\ &= 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = 7, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } AC = \sqrt{7}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC},$$

$$\sin \angle BAC = \frac{BC \cdot \sin \angle ABC}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{在 } \triangle AOB \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{OB}{\sin \angle BAC} = \frac{OA}{\sin \angle ABD},$$

$$\text{即 } OB \cdot \sin \angle ABD = OA \cdot \sin \angle BAC,$$

$$\text{同理, 在 } \triangle AOD \text{ 中, } OD \cdot \sin \angle ADB = OA \cdot \sin \angle DAC.$$

$$\text{又因为 } OB \cdot \sin \angle ABD = OD \cdot \sin \angle ADB,$$

$$\text{所以 } OA \cdot \sin \angle BAC = OA \cdot \sin \angle DAC.$$

$$\text{所以 } \sin \angle DAC = \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{14}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ADC \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{CD}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC},$$

$$\text{即 } \frac{CD}{\frac{\sqrt{21}}{14}} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \text{ 所以 } CD = 1. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又由余弦定理得 } \cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD},$$

$$\text{即 } -\frac{1}{2} = \frac{AD^2 + 1 - 7}{2AD}, \text{ 解得 } AD = 2. \quad (10 \text{ 分})$$

$$S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AD \times AC \times$$

$$\sin \angle DAC + \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AC \times$$

$$\sin \angle DAC \times (AD + AB) = \frac{5\sqrt{3}}{4}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. (1) 证明: 连接 BD 交 AC 于 O ,

因为底面 $ABCD$ 为菱形,

$$\text{所以 } AC \perp BD. \quad (1 \text{ 分})$$

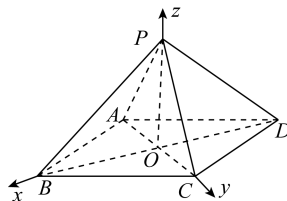
因为 $PA = PC$, O 为 AC 的中点,

$$\text{所以 } AC \perp PO. \quad (2 \text{ 分})$$

又 $BD \cap PO = O$, $BD \subset$ 平面 PBD , $PO \subset$ 平面 PBD ,

$$\text{所以 } AC \perp \text{平面 } PBD. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{又 } PB \subset \text{平面 } PBD, \text{ 所以 } AC \perp PB. \quad (5 \text{ 分})$$



(2) 解: 因为 $PA = PC$, O 为 AC 的中点,

$$\text{所以 } PO \perp AC.$$

又平面 $PAC \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAC \cap$ 底面 $ABCD = AC$, $PO \subset$ 平面 PAC ,

$$\text{所以 } PO \perp \text{底面 } ABCD, \text{ 所以 } OB, OC, OP \text{ 两两垂直}. \quad (6 \text{ 分})$$

以 O 为坐标原点, 分别以 OB, OC, OP 所在直线为 x, y, z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$,

PB 与底面所成的角即为 $\angle PBO = 45^\circ$,

$$\text{所以 } OB = OP. \text{ 设 } OP = \sqrt{3}, \text{ 则 } OC = 1, OB = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), A(0, -1, 0), \vec{BP} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \vec{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0). \quad (7 \text{ 分})$$

设平面 BPC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{BC} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0, \\ -\sqrt{3}x + y = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, 1), \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{又平面 } APC \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{m} = \vec{OB} = (\sqrt{3}, 0, 0),$$

$$(10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

又因为二面角 $B-PC-A$ 为锐角,

$$\text{所以二面角 } B-PC-A \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (12 \text{ 分})$$

21. 解: (1) 设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

由题意得, $b = 1, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $a^2 = b^2 + c^2$, (2分)

所以 $a = 2, c = \sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (4分)

(2) 设动直线 l 的方程为 $x = my + n (m \neq 0)$.

由直线 l 与圆 O 相切得 $\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$, 即 $n^2 = m^2 + 1$.

(5分)

由 $\begin{cases} x = my + n, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(m^2 + 4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0$,

其中 $\Delta = 4m^2n^2 - 4(m^2 + 4)(n^2 - 4) = 16(m^2 + 4 - n^2) = 48 > 0$. (6分)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), D(x_0, y_0)$,

则 $y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 4}$, 从而 $y_0 = \frac{-mn}{m^2 + 4}, x_0 = \frac{4n}{m^2 + 4}$.

(7分)

所以 $S_{\triangle OMD} = \frac{1}{2} |OM| |MD| = \frac{1}{2} |MD|$

$= \frac{1}{2} \sqrt{|OD|^2 - |OM|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 1}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16n^2}{(m^2 + 4)^2} + \frac{m^2 n^2}{(m^2 + 4)^2} - 1}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9m^2}{(m^2 + 4)^2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|m|}{m^2 + 4}$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{|m| + \frac{4}{|m|}}$. (9分)

因为 $|m| + \frac{4}{|m|} \geq 4$, 所以 $S_{\triangle OMD} \leq \frac{3}{8}$.

当 $|m| = 2$ 时, 上式等号成立, 此时 $|n| = \sqrt{5}$. (10分)

故 $\triangle OMD$ 的面积最大值为 $\frac{3}{8}$, 此时 D 点的坐标为

$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$.

(12分)

22. (1) 解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = \frac{1-x}{e^x-1} - \ln x - 1, f'(1) = -1, f(1) = 1$,

(2分)

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y - 1 = -(x - 1)$, 即 $x + y - 2 = 0$. (3分)

(2) 证明: (i) $f(x) < 2$ 可化为 $\frac{x}{e^x-1} < 2 + x \ln x$.

设 $h(x) = \frac{x}{e^x-1}$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x-1}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$. (5分)

设 $g(x) = x \ln x + 2$, 则 $g'(x) = \ln x + 1$,

当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增,

故 $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e}$. (7分)

因为 $1 < 2 - \frac{1}{e}$, 所以 $\frac{x}{e^x-1} < 2 + x \ln x$, 所以 $f(x) < 2$. (8分)

(ii) 由 $f(x) < 2$, 得 $\frac{x}{e^x-1} - x \ln x < 2$,

令 $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*$, 得 $\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}-1} + \frac{1}{n} \ln n < 2$,

即 $\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1} + \ln n < 2n$, (10分)

所以 $e^{\frac{n-1}{n}} < 2n - \ln n$.

所以 $2n - \ln n > 0$,

所以 $e^{n-1} < (2n - \ln n)^n$. (12分)