

河北衡水中学 2021 届全国高三第一次联合考试

数 学

本试卷 4 页。总分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | 1 < x < 5\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{2\}$ B. $\{3\}$ C. $\{2,3\}$ D. $\{1,2,3\}$

2. 若复数 $z = 1 - i$, 则 $|\frac{z}{1-z}| =$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 4

3. 某班级要从 6 名男生、3 名女生中选派 6 人参加社区宣传活动,如果要求至少有 2 名女生参加,那么不同的选派方案种数为

- A. 19 B. 38 C. 55 D. 65

4. 数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... 称为斐波那契数列, 是意大利著名数学家斐波那契于 1202 年在他撰写的《算盘全书》中提出的, 该数列的特点是: 从第三项起, 每一项都等于它前面两项的和在该数列的前 2020 项中, 偶数的个数为

- A. 505 B. 673 C. 674 D. 1010

5. 已知非零向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为

- A. $\frac{2}{3}\pi$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$

6. 为加快新冠肺炎检测效率, 某检测机构采取合并检测法, 即将多人的拭子样本合并检测, 若为阴性, 则可以确定所有样本都是阴性的, 若为阳性, 则还需要对本组的每个人再做检测. 现对 20 名密切接触者的拭子样本进行合并检测, 每份样本的检测结果是阴性还是阳性都是相

互独立的,每人检测结果呈阳性的概率为 p ,且检测次数的数学期望为 20,则 p 的值为

- A. $1 - \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{20}}$ B. $1 - \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{21}}$ C. $1 - \left(\frac{1}{21}\right)^{\frac{1}{20}}$ D. $1 - \left(\frac{1}{21}\right)^{\frac{1}{21}}$

7. 已知未成年男性的体重 G (单位:kg) 与身高 x (单位:cm) 的关系可用指数模型 $G = ae^{bx}$ 来描述,根据大数据统计计算得到 $a = 2.004$, $b = 0.0197$. 现有一名未成年男性身高为 110cm, 体重为 17.5kg, 预测当他体重为 35kg 时, 身高约为 ($\ln 2 \approx 0.69$)

- A. 155 cm B. 150cm C. 145 cm D. 135 cm

8. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M 为 CC_1 的中点, 点 N 在侧面 ADD_1A_1 内, 若 $BM \perp A_1N$. 则 $\triangle ABN$ 面积的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. 1 D. 5

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分。

9. 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha - \frac{3}{5}\pi\right) =$

- A. $-\frac{24}{25}$ B. $-\frac{12}{25}$ C. $\frac{12}{25}$ D. $\frac{24}{25}$

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 焦点为 F , 过焦点的直线 l 与抛物线 C 相交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则下列说法一定正确的是

- A. $|AB|$ 的最小值为 2 B. 线段 AB 为直径的圆与直线 $x = -1$ 相切
C. x_1x_2 为定值 D. 若 $M(-1, 0)$, 则 $\angle AMF = \angle BMF$

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则

- A. $f(x + 4) = f(x)$ B. $f(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 上单调递增
C. $f(x)$ 有最大值 D. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ 是满足条件的一个函数

12. 若存在实数 t , 对任意的 $x \in (0, s]$, 不等式 $(2x - x^2 - t)(1 - t - x) \leq 0$ 恒成立, 则 s 的值可以为

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点, P 为双曲线右支上一点, 且 $|PF_1| = 2|PF_2|$

则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____.

14. 已知实数 $a, b \in (\sqrt{2}, +\infty)$, 且满足 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} > \ln \frac{b}{a}$, 则 $a, b, \sqrt{ab}$ 的大小关系是_____.

15. 数学多选题有 A,B,C,D 四个选项, 在给出选项中, 有多项符合题目要求全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的不得分. 已知某道数学多选题正确答案为 B,D, 小明同学不会做这道题目, 他随机地填涂了至少一个选项, 则他能得分的概率为_____.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp AB$, $PA=4$, $AB=3$, 二面角 $P-AB-C$ 的大小为 30° , 在侧面 $\triangle PAB$ 内(含边界)有一动点 M , 满足 M 到 PA 的距离与 M 到平面 ABC 的距离相等, 则 M 的轨迹的长度为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在①对任意 $n > 1$, 满足 $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$, ② $S_{n+1} - 2 = S_n + a_n$ ③ $S_n = na_{n+1} - n(n+1)$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中.

问题: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2=4$, _____, 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; 若数列 $\{a_n\}$ 不一定是等差数列, 说明理由.

(注: 如果选择多个条件分别作答, 则按第一个解答计分)

18. (12 分)

振华大型电子厂为了解每位工人每天制造某种电子产品的件数, 记录了某天所有工人每人的制造件数, 并对其进行了简单随机抽样统计, 统计结果如下:

制造电子产品的件数	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
工人数	1	3	11	x	4	1

(1) 若去掉 $[70,80)$ 内的所有数据, 则件数的平均数减少 2 到 3 (即大于等于 2, 且小于 3), 试求样本中制造电子产品的件数在 $[70,80)$ 的人数 x 的取值范围; (同一区间数据用该组区间数据的中点值作代表)

(2) 若电子厂共有工人 1500 人, 且每位工人制造电子产品的件数 $X \sim N(70, 11^2)$, 试估计制造电子产品件数小于等于 48 件的工人的人数.

附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$, $P(\mu - 2\sigma < x \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.96$.

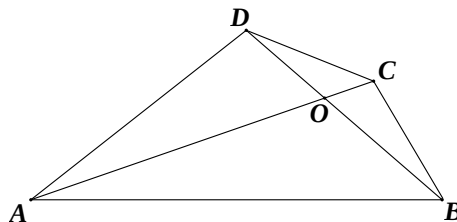
19. (12 分)

如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , $OB \cdot \sin \angle ABD = OD \cdot \sin \angle ADB$

$\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $AB = 3BC = 3$.

(1) 求 $\sin \angle DAC$;

(2) 若 $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

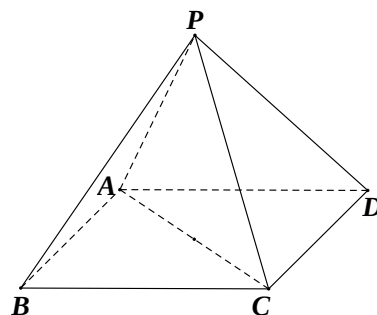


20. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, 平面 $PAC \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = PC = AC$.

(1) 证明: $AC \perp PB$.

(2) 若 PB 与底面所成的角为 45° , 求二面角 $B-PC-A$ 的余弦值.



21. (12 分)

知椭圆 C 的焦点在 x 轴上, 并且经过点 $(0,1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 动直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切于点 M , 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 D , 求 $\triangle OMD$ 面积的最大值, 并求此时点 D 的坐标.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}} - x \ln x$

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程

(2) 证明: (i) $f(x) < 2$;

(ii) 意 $n \in N^*$, $e^{n-1} < (2n - \ln n)^n$.