

河北衡水中学 2021 届全国高三第二次联合考试

数 学

本试卷 4 页。总分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{0, 2, 4\}$ B. $\{0, 2\}$
 C. $\{x | 0 \leq x \leq 4\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x = 4\}$
2. 已知复数 $z = \frac{3+2i}{3-2i}$, 则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, $A(4, 3)$, $B(-1, \sqrt{3})$, 则 $\angle AOB$ 的余弦值为
 A. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ B. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ C. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$
4. 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 则下列结论正确的是
 A. 若 $a \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 $a \parallel b$
 B. 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel b$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 C. 若 $\alpha \cap \beta = a, b \subset \beta, b \perp a$, 则 $\alpha \perp \beta$
 D. 若 $\alpha \cap \beta = l, a \perp \beta, a \subset \alpha, a \perp l, a \parallel b$, 则 $b \perp \beta$
5. 在五边形 $ABCDE$ 中 $\overrightarrow{EB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, M, N 分别为 AE, BD 的中点, 则 $\overrightarrow{MN} =$
 A. $\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ D. $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
6. 命题 p : 关于 x 的不等式 $ax^2 + ax - x - 1 < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$ 的一个充分不必要条件是
 A. $a \leq -1$ B. $a > 0$ C. $-2 < a < 0$ D. $a < -2$
7. 面对全球蔓延的疫情, 疫苗是控制传染的最有力技术手段. 科研攻关组第一时间把疫苗研发作为重中之重, 对灭活疫苗、重组蛋白疫苗、腺病毒载体疫苗、减毒流感病毒载体疫苗和核酸疫苗 5 个技术路线并行研发, 组织了 12 个优势团队进行联合攻关. 其中有 5 个团队已经依据各自的研究优势分别选择了灭活疫苗、重组蛋白疫苗、腺病毒载体疫苗、减毒流感病毒载体疫苗和核酸疫苗这 5 个技术路线, 其余团队作为辅助技术支持进驻这 5 个技术路线. 若保障每个技术路线至少有两个

研究团队,则不同的分配方案的种数为

- A. 14700 B. 16800 C. 27300 D. 50400

8. 若不等式 $m\cos x - \cos 3x - \frac{1}{8} \leq 0$ 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是

- A. $(-\infty, -\frac{9}{4}]$ B. $(-\infty, -2]$ C. $(-\infty, \frac{9}{4}]$ D. $(-\infty, \frac{9}{8}]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分。

9. 已知 $0 < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b < 1$, 则下列说法正确的是

- A. $1 > a^2 > b^2 > \frac{1}{4}$ B. $2 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 1$ C. $\frac{a}{b-1} > \frac{b}{a-1}$ D. $\frac{1}{\sqrt{e}} > e^{-b} > \frac{1}{e}$

10. 将函数 $f(x) = 2\cos x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再将得到的图象向左平移 π 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列说法正确的有

- A. $g(x)$ 为奇函数
B. $g(x)$ 的周期为 4π
C. $\forall x \in R$, 都有 $g(x+\pi) = g(\pi-x)$
D. $g(x)$ 在区间 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 上单调递增, 且最小值为 $-\sqrt{3}$

11. 提丢斯·波得定律是关于太阳系中行星轨道的一个简单的几何学规则, 它是在 1766 年由德国的一位中学老师戴维斯·提丢斯发现的, 后来被柏林天文台的台长波得归纳成一条定律, 即数列 $\{a_n\}$: $0.4, 0.7, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 19.6 \dots$ 表示的是太阳系第 n 颗行星与太阳的平均距离 (以天文单位 A.U. 为单位). 现将数列 $\{a_n\}$ 的各项乘以 10 后再减 4, 得到数列 $\{b_n\}$, 可以发现数列 $\{b_n\}$ 从第 3 项起, 每项是前一项的 2 倍, 则下列说法正确的是

- A. 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \times 2^{n-2}$
B. 数列 $\{a_n\}$ 的第 2021 项为 $0.3 \times 2^{2020} + 0.4$
C. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 0.4n + 0.3 \times 2^{n-1} - 0.3$
D. 数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 3(n-1) \cdot 2^{n-1}$

12. 在一张纸上有一圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与点 $M(m, 0) (m \neq -2)$, 折叠纸片, 使圆 C 上某一点 M' 恰好与点 M 重合, 这样的每次折法都会留下一条直线折痕 PQ , 设折痕 PQ 与直线 $M'C$ 的交点为 T , 则下列说法正确的是

- A. 当 $-2-r < m < -2+r$ 时, 点 T 的轨迹为椭圆
B. 当 $r=1, m=2$ 时, 点 T 的轨迹方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
C. 当 $m=2, 1 \leq r \leq 2$ 时, 点 T 的轨迹对应曲线的离心率取值范围为 $[2, 4]$
D. 当 $r=2\sqrt{2}, m=2$ 时, 在 T 的轨迹上任取一点 S , 过 S 作直线 $y=x$ 的垂线, 垂足为 N , 则 $\triangle SON$ (O 为坐标原点) 的面积为定值

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 正态分布在概率和统计中占有重要地位, 它广泛存在于自然现象、生产和生活实践中, 在现实生活中, 很多随机变量都服从或近似服从正态分布. 在某次大型联考中, 所有学生的数学成绩

$X \sim N(100, 225)$. 若成绩低于 $m + 10$ 的同学人数和高于 $2m - 20$ 的同学人数相同, 则整数 m 的值为 _____.

14. 已知抛物线 $x^2 = 4y$, 其准线与 y 轴交于点 P , 则过点 P 的抛物线的切线方程为 _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 的对边, 其中 $A = \frac{\pi}{3}, b + c = 4, M$ 为线段 BC 的中点, 则 $|AM|$ 的最小值为 _____.

16. 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面为正方形, $PA = PB = PC = PD, AB = 2$, 若四棱锥 $P - ABCD$ 的体积为 $\frac{4}{3}$, 则以点 P 为球心, 以 $\sqrt{2}$ 为半径的球的表面与四棱锥侧面 PAB 交线的长度约为 _____, 该四棱锥 $P - ABCD$ 外接球的体积为 _____. (参考数据 $\tan 35^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$) (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 3π , ② $\triangle ADC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, ③ $\triangle BDC$ 的周长为 $5 + \sqrt{7}$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并给出解答.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , D 是 AB 边上一点. 已知 $AD = \frac{1}{3}AB, \sin A \sin C = \frac{3}{4}, \cos 2B + 3\cos B = 1$, 若 _____, 求 CD 的长.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = S_5 = -20$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

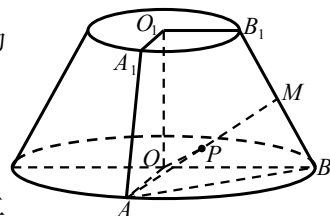
(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项, 4 为公比的等比数列, 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项为 a_m , 记 m 由小到大构成数列 $\{c_n\}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 已知圆台 O_1O 的下底面半径为 2, 上底面半径为 1, 母线与底面所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, AA_1, BB_1 为母线, 平面 $AA_1O_1O \perp$ 平面 BB_1O_1O , M 为 BB_1 的中点, P 为 AM 上的任意一点.

(1) 证明: $BB_1 \perp OP$;

(2) 当点 P 为线段 AM 的中点时, 求平面 OPB 与平面 OAM 所成锐二面角的余弦值.



20. (12 分)

国务院办公厅印发了《关于防止耕地“非粮化”稳定粮食生产的意见》, 意见指出要切实稳定粮食生产, 牢牢守住国家粮食安全生命线. 为了切实落实好稻谷、小麦、玉米三大谷物种植情况, 某乡镇抽样调查了 A 村庄部分耕地 (包含永久农田和一般耕地) 的使用情况, 其中永久农田 100 亩, 三

大谷物的种植面积为 90 亩, 棉、油、蔬菜等的种植面积为 10 亩; 一般耕地 50 亩, 三大谷物的种植面积为 30 亩, 棉、油、蔬菜等的种植面积为 20 亩.

- (1) 以频率代替概率, 求 A 村庄每亩耕地 (包括永久农田和一般耕地) 种植三大谷物的概率;
- (2) 上级有关部门要督促落实整个乡镇三大谷物的种植情况, 现从本乡镇抽测 5 个村庄, 每个村庄的三大谷物的种植情况符合要求的概率均为 A 村庄每亩耕地 (永久农田和一般耕地) 种植三大谷物的概率. 若抽测的村庄三大谷物的种植情况符合要求, 则为本乡镇记 1 分, 若不符合要求, 记 -1 分. X 表示本乡镇的总积分, 求 X 的分布列及数学期望;
- (3) 目前在农村的劳动力大部分是中老年人, 调查中发现, 80 位中老年劳动力中有 65 人种植三大谷物, 其余种植棉、油、蔬菜等农作物; 20 位青壮年劳动力中有 15 人种植需要技术和体力, 短期收益大的棉、油、蔬菜等农作物, 其余种植三大谷物. 请完成下表, 并判断是否有 99.9% 的把握认为种植作物的种类与劳动力的年龄层次有关?

劳动力年龄层次	种植情况		合计
	种植三大谷物	种植棉、油、蔬菜等	
中老年劳动力			
青壮年劳动力			
合计			

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $P\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 且以线段 F_1F_2 为直径的圆过点 P .

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) O 为坐标原点, 若直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 直线 OM 的斜率为 k_1 , 直线 ON 的斜率为 k_2 , 当 $\triangle OMN$ 的面积为定值 1 时, k_1k_2 是否为定值? 若是, 求出 k_1k_2 的值; 若不是, 请说明理由.

22. (12 分)

$$\text{设函数 } f(x) = \ln x + x + \frac{2}{x}, g(x) = \frac{e^x}{x}$$

- (1) 若 $h(x) = mf(x) - g(x), m \in R$, 试判断函数 $h(x)$ 的极值点个数;
- (2) 设 $\varphi(x) = x^2g(x) - f(x) - kx + 2x + \frac{2}{x}$ 若 $\varphi(x) \geq 1$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.