

2021 年普通高等学校招生全国统一模拟考试

数学参考答案及评分标准

2021.4(1)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。

1. B

解析:因为 $|x-1| < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$, 所以 $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 故选 B.

2. C

解析:因为 $(1+ai)^3 = 1+3ai+3(ai)^2+(ai)^3 = 1-3a^2+(3a-a^3)i$,
所以 $3a-a^3=0$, 又 $a \neq 0$, 所以 $a^2=3$. 故选 C.

3. A

解析:因为 $(2\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 4\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha = \frac{4\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{4\tan^2 \alpha + 1 + 4\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{9}{5}$, 所以 $11\tan^2 \alpha + 20\tan \alpha - 4 = 0$, 解得 $\tan \alpha = -2$ 或 $\tan \alpha = \frac{2}{11}$. 又 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\tan \alpha = -2$, 故选 A.

4. C

解析:设双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{a}x$, 右焦点坐标为 $(c, 0)$, 又 $a^2 + 3 = c^2$, 则 $d = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{a}c\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{a}c\right|}{\sqrt{\frac{a^2+3}{a^2}}} = \sqrt{3}$, 故选 C.

5. D

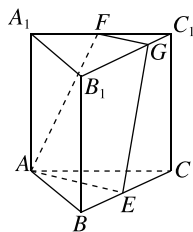
解析: $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{1 \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{1}{3} \Rightarrow |\mathbf{b}| = 6$. 故选 D.

6. A

解析:由马尔萨斯模型,得 $13.33 = 12.43e^{10r}$, 所以 $e^{10r} = \frac{13.33}{12.43}$. 所以我国 2020 年末的全国总人口数 $y = 13.33e^{10r} = \frac{13.33^2}{12.43} = \frac{177.6889}{12.43} \approx 14.30$ (亿), 故选 A.

7. D

解析:如图,平面 AEF 与 B_1C_1 交于点 G , 且 $C_1G = \frac{1}{4}C_1B_1$, 故 GC_1F-ECA 为三棱台,



所以 $V_{\text{棱台 } GC_1F-ECA} = \frac{1}{3}(S_{\triangle GC_1F} + \sqrt{S_{\triangle GC_1F} \cdot S_{\triangle ECA}} + S_{\triangle ECA}) \cdot CC_1 = \frac{7\sqrt{3}}{96}$,

$V_{\text{三棱柱 } A_1B_1C_1-ABC} = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $V_{\text{三棱柱 } A_1B_1C_1-ABC} - V_{\text{棱台 } GC_1F-ECA} = \frac{7}{17}$, 故选 D.

8. B

解析:由 $y^2 e^{1-y+x} - a e^x - \frac{x}{2} = 0$, 得 $y^2 e^{1-y} = a + \frac{x}{2e^x}$, 设 $f(x) = a + \frac{x}{2e^x}$, $g(y) = y^2 e^{1-y}$. 因为 $f'(x) = \frac{1-x}{2e^x}$, 故当 $x \in [0, 1]$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x) \in [a, a + \frac{1}{2e}]$. 因为 $g'(y) = e^{1-y} y(2-y)$, 故当 $y \in (-1, 0)$ 时, $g'(y) < 0$, 当 $y \in (0, 2)$ 时, $g'(y) > 0$, 当 $y \in (2, 3)$ 时, $g'(y) < 0$, 所以函数 $g(y)$ 在 $y \in (-1, 0)$ 上单调递减, 在 $y \in (0, 2)$ 上单调递增, 在 $y \in (2, 3)$ 上单调递减, 且 $g(-1) = e^2 > g(2) = \frac{4}{e} > g(3) = \frac{9}{e^2}$, 要总存在三个不同的实数 $y \in [-1, 3]$, 使得 $y^2 e^{1-y} = a + \frac{x}{2e^x}$, 只要 $a \geq \frac{9}{e^2}$ 且 $a + \frac{1}{2e} < \frac{4}{e}$, 所以 $\frac{9}{e^2} \leq a < \frac{7}{2e}$, 故选 B.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. BCD

解析: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 故圆 M 是圆心为 $(1, 1)$, 半径 $r=1$ 的圆, 直线 l 过原点, 故 A 错误;

若 $k=0$, 则直线 $l: y=0$, 直线 l 与圆 M 相切, 故 B 正确;

当 $k=-1$ 时, 直线 l 的方程为 $y=x$, 过圆 M 的圆心, 故 C 正确;

由点到直线距离公式, 知 $d = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{\frac{k^2+1+2k}{k^2+1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{k+\frac{1}{k}}} \leq \sqrt{2}$ (当 $k=1$ 时, 等号成立),

故 D 正确, 故选 BCD.

10. AB

解析: 由概率统计相关知识, 可知各组频率之和为 1.

∵ 频率 = (频率/组距) × 组距,

∴ $0.5(0.08+0.16+0.30+a+0.52+0.30+0.12+0.08+0.04) = 1$, 解得 $a=0.4$, 故 A 正确;

直方图的众数是频率最高组的中点, 即 $\frac{13.5+14}{2} = 13.75$, 故 B 正确;

直方图的中位数是频率相等的分点, 设为 x , 则 $0.5 \times (0.08+0.16+0.30+0.4) + 0.52(x-13.5) = 0.5$, 解得 $x \approx 13.56 < 13.7$, 故 C 错误;

由图可知, 成绩小于 14.15 秒的人数所占百分比为:

$[0.5 \times (0.08+0.16+0.30+0.4+0.52) + 0.3 \times 0.15] \times 100\% = 77.5\% < 80\%$, 故 D 错误, 故选 AB.

11. ACD

解析: 由 $2^a = 3^b = 6$, 得 $a = \log_2 6, b = \log_3 6 \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_6 2, \frac{1}{b} = \log_6 3$,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_6 2 + \log_6 3 = 1, 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow ab \geq 4$, 又 $a \neq b$, 所以 $ab > 4$, 故 A 正确;

因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1} \Rightarrow b-1 = \frac{1}{a-1}$,

所以 $(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + \left(\frac{1}{a-1}\right)^2 > 2$, 故 B 错误;

因为 $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab$, 又 $ab > 4$, 所以 $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab > 2$, 故 C 正确;

因为 $a + b = (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 4$, 又 $a \neq b$, 所以 $a + b > 4$, D 正确, 故选 ACD.

12. AD

解析: 若 $|a - b| = km$, 则 $a = km + b$ 或 $b = km + a$, 故 $a \equiv b \pmod{m}$, 故 A 正确;

因为 $2^{18} = 4^9 = (3 + 1)^9 = C_9^0 3^9 + C_9^1 3^8 + C_9^2 3^7 + \cdots + C_9^8 3 + 1$, 所以 2^{18} 被 3 除得的余数为 1, 56 被 3 除得的余数为 2, 故 B 错误;

由 $a \equiv (m + 1) \pmod{m}$ 得 $a = km + 1$, 由 $b \equiv (m + 2) \pmod{m}$ 得 $b = tm + 2$,

$ab = (km + 1)(tm + 2) = ktm^2 + (2k + t)m + 2$, ab 被 m 除得的余数为 2, 而 $m + 3$ 被 m 除得的余数为 3, 故 C 错误;

若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则 $a = km + r, b = tm + r$,

$$a^n = (km + r)^n = (km)^n + C_n^1 (km)^{n-1} r + C_n^2 (km)^{n-2} r^2 + \cdots + C_n^{n-1} (km)^1 r^{n-1} + r^n,$$

$$b^n = (tm + r)^n = (tm)^n + C_n^1 (tm)^{n-1} r + C_n^2 (tm)^{n-2} r^2 + \cdots + C_n^{n-1} (tm)^1 r^{n-1} + r^n,$$

所以 $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, 故 D 正确, 故选 AD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 0.2

解析: 由 $X \sim N(1.5, 0.4^2)$, 得 $\mu = 1.5, 1.75 - 1.5 = 1.5 - 1.25$,

$$\text{所以 } P(1.25 \leq X \leq 1.75) = 1 - 2[1 - P(X \leq 1.75)] = 1 - 2(1 - 0.6) = 0.2.$$

14. $\sqrt{5}$ 2 (第一空 2 分, 第二空 3 分)

$$\text{解析: } f(x) = 2\sin x + \cos x = \sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos x \right) = \sqrt{5} \sin(x + \varphi), \tan \varphi = \frac{1}{2},$$

当 $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x)$ 的函数值最大,

$$\text{故 } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\tan \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\tan \varphi} = 2.$$

15. (0, 4]

解析: 由题意, 知 $F(1, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $x = my + 1$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4my - 4 = 0,$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4.$$

由 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} \leq 1$, 得

$$(4 - x_1)(4 - x_2) + y_1 y_2 = (3 - my_1)(3 - my_2) + y_1 y_2 = (m^2 + 1)y_1 y_2 - 3m(y_1 + y_2) + 9 \leq 1,$$

$$\text{又 } y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4, \text{ 所以 } -16m^2 + 5 \leq 1, \text{ 所以 } \frac{1}{4} \leq m^2.$$

$$\text{又 } m = \frac{1}{k}, \text{ 所以 } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{k^2}, \text{ 故 } 0 < k^2 \leq 4.$$

16. $\frac{26\pi}{27}$

解析:原模具的毛坯体积为 $V_1 = \frac{4\pi}{3} \times 1^3 + 2\pi = \frac{10\pi}{3}$.

设挖出的小圆柱的底面半径为 r ($0 < r < 1$),

则该小圆柱在半球内的高 $h = \sqrt{1-r^2}$, 故 $r^2 = 1-h^2$ ($0 < h < 1$),

所以挖出的小圆柱的体积 $V_2 = \pi r^2 (2+2h) = 2\pi(1-h^2)(1+h) = -2\pi(h^3 + h^2 - h - 1)$, $0 < h < 1$,

所以 $V_2' = -2\pi(3h^2 + 2h - 1) = -2\pi(3h-1)(h+1)$, 所以当 $h = \frac{1}{3}$ 时, V_2 的最大值为 $\frac{64\pi}{27}$, 所以

挖出圆柱形空间后, 该模具体积的最小值为 $V_1 - V_{2\text{最大}} = \frac{10\pi}{3} - \frac{64\pi}{27} = \frac{26\pi}{27}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

解: (1) 由 $a_{n+1} - 2a_n = 3$, 得 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$, 即 $\frac{a_{n+1} + 3}{a_n + 3} = 2$ 3 分

又 $a_1 = 1$,

故数列 $\{a_n + 3\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 4 分

所以 $a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$,

所以 $a_n = 2^{n+1} - 3$ 5 分

(2) 由 (1), 得 $S_n = \frac{4(1-2^n)}{1-2} - 3n = 2^{n+2} - 3n - 4$, 7 分

又当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = 2^{n+2} - 3n - 4 - 2^{n+1} + 3(n-1) + 4 = 2^{n+1} - 3 > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, 8 分

$S_9 = 2^{11} - 3 \times 9 - 4 = 2048 - 27 - 4 = 2017 < 2021$,

$S_{10} = 2^{12} - 3 \times 10 - 4 = 4096 - 30 - 4 = 4062 > 2021$,

故当 k 最小为 10 时, $S_k > 2021$ 10 分

18. (12 分)

解: (1) 由正弦定理, 得 $\sin C = \sin B \cos A - \sin A \sin B$, 2 分

又 $C = \pi - (A+B)$, 所以 $\sin(A+B) = \sin B \cos A - \sin A \sin B$, 3 分

即 $\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin B \cos A - \sin A \sin B$, 4 分

即 $\cos B = -\sin B \Rightarrow \tan B = -1$, 5 分

所以 $B = \frac{3\pi}{4}$ 6 分

(2) 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得 $20 = 2c^2 + c^2 - 2\sqrt{2}c^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5c^2$, 8 分

解得 $c = 2$, 9 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}c^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ 12 分

19. (12 分)

解: (1) 假设性别与到校形式无关, 根据列联表中的数据, 得到

$k = \frac{110 \times (20 \times 20 - 30 \times 40)^2}{50 \times 60 \times 50 \times 60} = \frac{352}{45} \approx 7.822 > 6.635$, 3 分

因此, 能在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为到校形式与性别有关系. 4 分

(2) X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

若以样本的频率视为概率, 则在该校中随机抽取 1 人为“独自到校”的概率为 $\frac{6}{11}$, 6 分

在该校中随机抽取 6 人, 可视为 6 次独立重复试验,

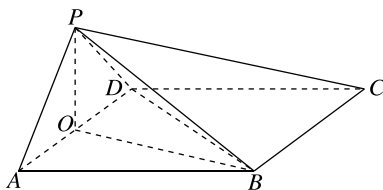
所以 $X \sim B\left(6, \frac{6}{11}\right)$, 8 分

故 $E(X) = 6 \times \frac{6}{11} = \frac{36}{11}$, 10 分

$D(X) = 6 \times \frac{6}{11} \times \left(1 - \frac{6}{11}\right) = \frac{180}{121}$ 12 分

20. (12 分)

(1) 证明: 如图, 设 AD 的中点为 O , 连接 OP, OB, BD .



由 $PA = PD = AD, AB = AD, \angle DAB = 60^\circ$, 可知 $\triangle ABD, \triangle PAD$ 为等边三角形,

又点 O 为 AD 的中点, 所以 $PO \perp AD, BO \perp AD$ 2 分

又 $PO \cap BO = O$, 故 $AD \perp$ 平面 POB .

又 $PB \subset$ 平面 POB ,

所以 $AD \perp PB$ 4 分

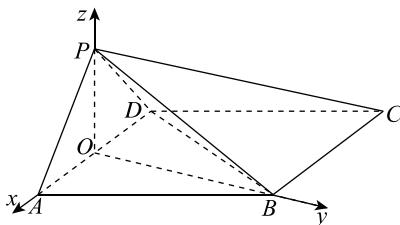
(2) 解: 不妨设 $PA = PD = AD = 2$, 则 $OP = BO = \sqrt{3}$.

由 $AB \parallel CD$, 得 $\cos \angle PBA = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 又 $AP = AB = 2$, 故 $PB = \sqrt{6}$, 6 分

在 $\triangle POB$ 中, $OP^2 + OB^2 = PB^2$, 所以 $PO \perp OB$,

由(1)可知 $PO \perp AD, BO \perp AD$, 故 PO, OB, AD 两两垂直.

以 O 为坐标原点, 分别以 OA, OB, OP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 7 分



则 $A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), C(-2, \sqrt{3}, 0)$ 8 分

设 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 APB 的法向量,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ -x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases}$ 可取 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, 1)$ 9 分

设 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 PBC 的法向量,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{3}y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ -2x_2 = 0, \end{cases}$ 可取 $\mathbf{m} = (0, -1, -1)$ 10 分

$$\therefore \cos \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \rangle = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{m}|} = \frac{-2}{\sqrt{3+1+1} \times \sqrt{1+1}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

由题意,可知二面角 $A-PB-C$ 的平面角为钝角,

$$\therefore \text{二面角 } A-PB-C \text{ 的余弦值为 } -\frac{\sqrt{10}}{5}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (12 分)

解:(1)因为 $f(x)=e^x-ex^2-2$,所以 $f'(x)=e^x-2ex$,故 $k=f'(1)=-e$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

又 $f(1)=-2$,所以切点坐标为 $(1,-2)$,

故函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+2=-e(x-1)$,即 $y=-ex+e-2$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以切线与坐标轴交点坐标分别为 $(0,e-2),(\frac{e-2}{e},0)$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

故所求三角形面积为 $\frac{1}{2} \times (e-2) \times (\frac{e-2}{e}) = \frac{(e-2)^2}{2e} = \frac{e^2-4e+4}{2e} = \frac{e}{2} + \frac{2}{e} - 2$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)由 $f(x)+e^{-x} \geq 0$,得 $e^x+e^{-x}-ax^2-2 \geq 0$ 恒成立,

令 $g(x)=e^x+e^{-x}-ax^2-2$,则 $g(-x)=g(x)$,所以 $g(x)$ 为偶函数, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

故只要求当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \geq 0$ 恒成立即可.

$g'(x)=e^x-e^{-x}-2ax$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设 $h(x)=e^x-e^{-x}-2ax(x \geq 0)$,故 $h'(x)=e^x+e^{-x}-2a(x \geq 0)$,

设 $H(x)=e^x+e^{-x}-2a(x \geq 0)$,则 $H'(x)=e^x-e^{-x}(x \geq 0)$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

显然 $H'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数,故 $H'(x) \geq H'(0)=0$,

即 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $H(0)=2-2a$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

当 $a \leq 1$ 时, $H(0)=2-2a \geq 0$,则有 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 $h(x) \geq h(0)=0$,

则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 $g(x) \geq g(0)=0$,符合题意; $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当 $a > 1$ 时, $H(0)=2-2a < 0$,又 $H(\ln 2a) = \frac{1}{2a} > 0$,故存在 $x_0 \in (0, \ln 2a)$,使得 $H(x_0)=0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < h(0)=0$,故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,

故 $g(x) < g(0)=0$,与 $g(x) \geq 0$ 矛盾.

综上,实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. (12 分)

解:(1)设动点 $P(x,y)$,则 $k_{PM} = \frac{y}{x+2}, k_{PN} = \frac{y}{x-2}$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\therefore k_{PM}k_{PN} = -\frac{1}{4}, \therefore \frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{4}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

即 $\frac{y^2}{x^2-4} = -\frac{1}{4},$

即 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \neq \pm 2),$

$\therefore$ 曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \neq \pm 2)$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), E(x_0, y_0), l: y = kx + m (k \neq 0, m \neq 0),$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ y = kx + m, \end{cases} \Rightarrow (1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2}, x_0 = \frac{-4km}{1+4k^2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又} \begin{cases} x^2 = 2py, \\ y = kx + m, \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2p(kx + m) \Rightarrow x^2 - 2pkx - 2pm = 0,$$

$$\therefore x_1 x_0 = -2pm,$$

$$\therefore x_1 \frac{-4km}{1+4k^2} = -2pm \Rightarrow x_1 = p \left(\frac{1+4k^2}{2k} \right). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ x^2 = 2py, \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{x^4}{p^2} = 4, \therefore p^2 \left(\frac{1+4k^2}{2k} \right)^2 + \frac{p^4 \left(\frac{1+4k^2}{2k} \right)^4}{p^2} = 4,$$

$$\therefore p^2 = \frac{4}{\left(\frac{1+4k^2}{2k} \right)^2 + \left(\frac{1+4k^2}{2k} \right)^4}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设} \left(\frac{1+4k^2}{2k} \right)^2 = \left(\frac{1}{2k} + 2k \right)^2 = t \geq 4,$$

$$\text{则} p^2 = \frac{4}{t+t^2}.$$

$$\text{当} k = \frac{1}{2}, \text{即} t = 4 \text{ 时, } p^2 \text{ 取得最大值, 最大值为 } \frac{1}{5}, \text{即} p = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{此时} A \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right), \text{直线} l \text{ 不过点 } M, N. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故存在不过原点的直线} l, \text{使点} E \text{ 为线段} AB \text{ 的中点, 且 } p \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$