

唐山市 2021 年普通高等学校招生统一考试第二次模拟演练

数 学

注意事项:

1、答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2、回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3、考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P=\{x|-1<x<1\}$, $Q=\{x|x(x+2)<0\}$, 则 $P\cap Q=$

A. $\{x|0<x<1\}$

B. $\{x|-2<x<1\}$

C. $\{x|-1<x<0\}$

D. $\{x|-2<x<0\}$

2. 已知多项选择题的四个选项 A、B、C、D 中至少有两个选项正确,规定:如果选择了错误选项就不得分。若某题的正确答案是 ABC,某考生随机选了两个选项,则其得分的概率为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{3}{11}$

3. 不等式 $(\frac{1}{2})^x \leq \sqrt{x}$ 的解集是

A. $[0, \frac{1}{2}]$

B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

D. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

4. 在 $(x-\frac{2}{x})^6$ 的展开式中,常数项为

A. 20

B. -20

C. 160

D. -160

5. 设复数 z 满足 $|z-2i|=1$, 在复平面内 z 对应的点到原点距离的最大值是

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{5}$

D. 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, E 为 AC 边上的点, 且 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$, 则 $\overrightarrow{DE}=$

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

7. 劳动力调查是一项抽样调查. 2021 年的劳动力调查以第七次人口普查的最新数据为基础抽取相关住户进入样本, 并且采用样本轮换模式. 劳动力调查的轮换是按照“2-10-2”模式进行, 即一个住户连续 2 个月接受调查, 在接下来的 10 个月中不接受调查, 然后再接受连续 2 个月的调查, 经历四次调查之后退出样本. 调查进行时保持每月进入样本接受第一次调查的新住户数量相同. 若从第 k 个月开始, 每个月都有 $\frac{1}{4}$ 的样本接

受第一次调查, $\frac{1}{4}$ 的样本接受第二次调查, $\frac{1}{4}$ 的样本接受第三次调查, $\frac{1}{4}$ 的样本接受第四次调查, 则 k 的值为

- A. 12 B. 13
C. 14 D. 15

8. 已知 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, A 为双曲线 C 右支上一点, 且位于 x 轴上方, B 为渐近线上一点, O 为坐标原点. 若四边形 $OFAB$ 为菱形, 则双曲线 C 的离心率 $e =$

- A. 2 B. 3
C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} + 1$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 设函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象为曲线 E , 则

- A. 将曲线 $y = \sin 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 与曲线 E 重合
B. 将曲线 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 与曲线 E 重合
C. $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 是曲线 E 的一个对称中心
D. 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

10. 已知 $a > b > 0$, 且 $ab = 4$, 则

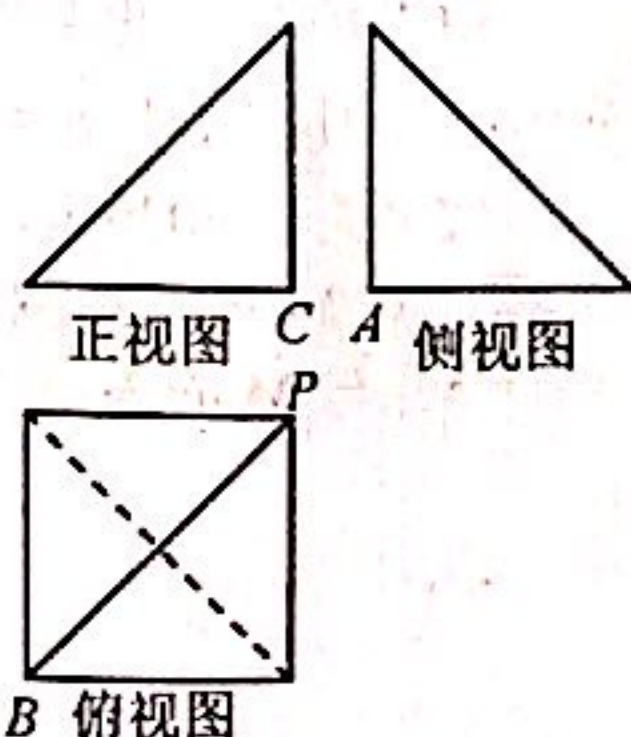
- A. $2^{a-b} > 1$ B. $\log_2 a - \log_2 b > 1$
C. $2^a + 2^b > 8$ D. $\log_2 a \cdot \log_2 b < 1$

11. 三棱锥 $P-ABC$ 的三视图如图, 图中所示顶点为棱锥对应顶点的投影, 正视图与侧视图是全等的等腰直角三角形, 俯视图是边长为 1 的正方形, 则

- A. 该棱锥各面都是直角三角形
B. 直线 AB 与 PC 所成角为 60°
C. 点 P 到底面 ABC 的距离为 1
D. 该棱锥的外接球的表面积为 3π

12. 若直线 $y = ax$ 与曲线 $f(x) = e^x$ 相交于不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 曲线 $f(x) = e^x$ 在 A, B 点处切线交于点 $M(x_0, y_0)$, 则

- A. $a > e$
B. $x_1 + x_2 - x_0 = 1$
C. $k_{AM} + k_{BM} > 2k_{AB}$
D. 存在 a , 使得 $\angle AMB = 135^\circ$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知圆锥的侧面展开图是半径为 2 的半圆，则该圆锥的体积为_____.
14. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 2 的等比数列， S_n 是其前 n 项和. 若 $a_3a_4 + a_5 = 0$ ，则 $S_6 =$ _____.
15. 有以下三个条件：①定义域不是 $\mathbf{R}$ ；②值域为 $\mathbf{R}$ ；③奇函数；写出一个同时满足以上条件的函数 $f(x) =$ _____.
16. 设抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，直线 $l: y = k(x-1)$ 与 E 交于 A, B ，与 y 轴交于 C ，若 $|AF| = |BC|$ ，则 $|AB| =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_4 = 24$ ， $S_{10} = 120$.

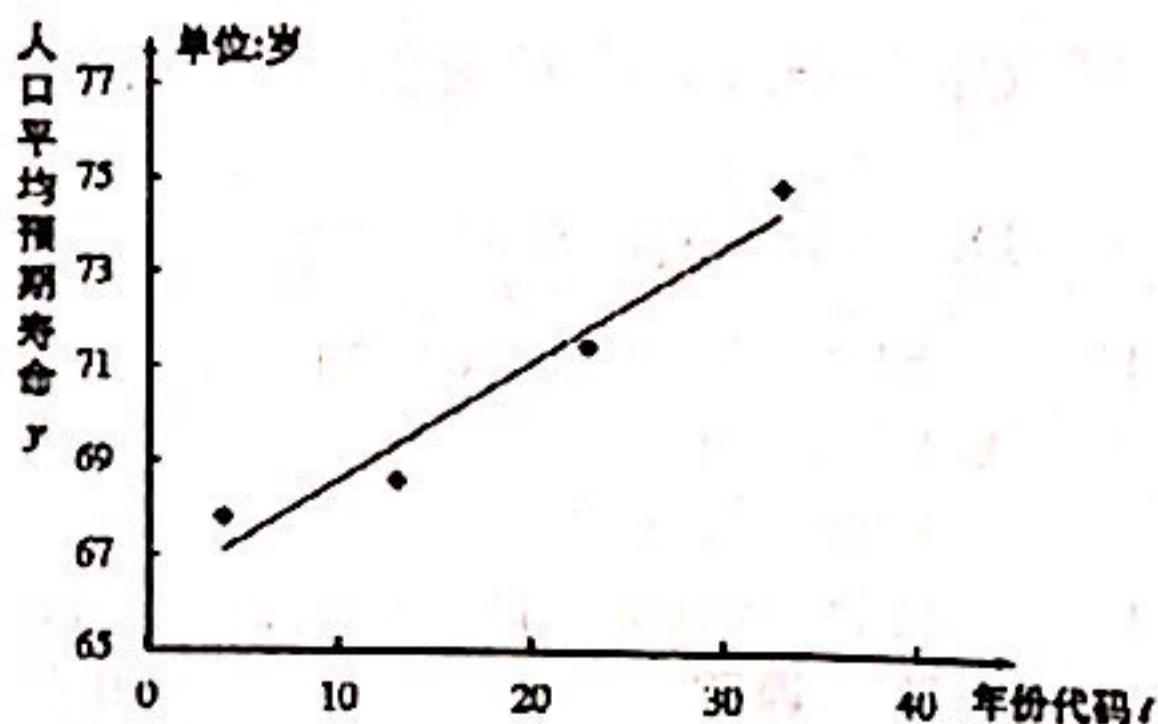
(1) 求 S_n ；

(2) 记数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明 $T_n < \frac{3}{4}$.

18. (12 分)

改革开放是我国发展的最大“红利”，自 1978 年以来，随着我国社会经济的快速发展，人民生活水平的不断提高以及医疗卫生保障体系的逐步完善，我国人口平均预期寿命继续延长，国民整体健康水平有较大幅度的提高. 下表数据反应了我国改革开放三十余年的人口平均预期寿命变化.

人口平均预期寿命变化表 单位：岁		
年份	年份代码	人口平均预期寿命
1981	4	67.77
1990	13	68.55
2000	23	71.4
2010	33	74.83



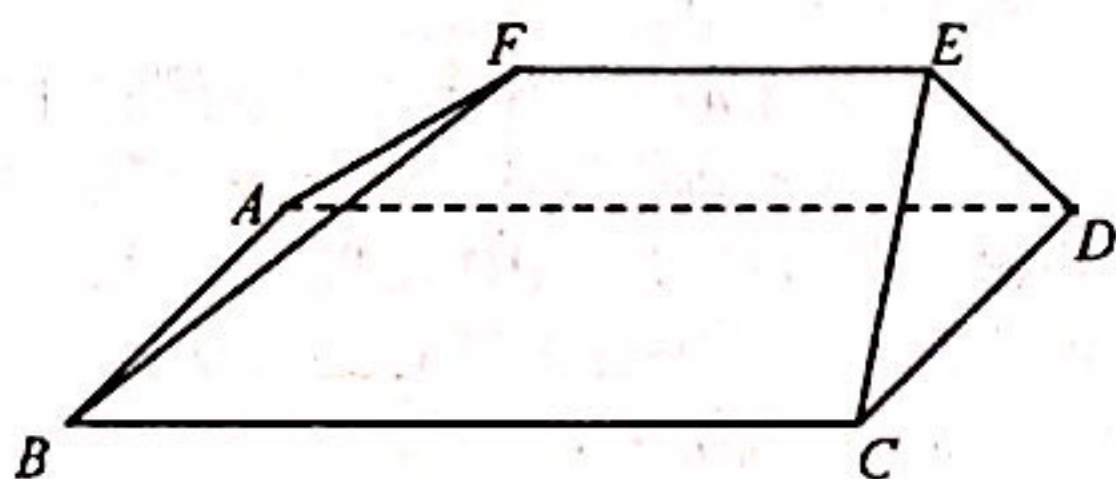
(1) 散点图如上图所示，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，已知回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中的斜率 $\hat{b} = 0.25$ ，且 $\bar{y} = 70.6375$ ，求 $\hat{a}$ ；

(2) 关于 2020 年我国人口平均预期寿命的统计数据 M 迄今暂未公布，依据线性回归方程，对 M 进行预测并给出预测值 M_1 (结果保留两位小数)，结合散点图的发展趋势，估计 M_1 与 M 的大小关系，并说明理由.

19. (12分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $EF \parallel AD$, 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, $AD=2EF=4DE=4$, $AF=\sqrt{3}$.

- (1) 判断平面 ABF 与平面 CDE 的交线 l 与 AB 的位置关系, 并说明理由;
- (2) 求平面 ABF 与平面 CDE 所成二面角的大小.



20. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . $C=\frac{\pi}{3}$, AB 边上的高为 $\sqrt{3}$.

- (1) 若 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长;
- (2) 求 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最大值.

21. (12分)

已知函数 $f(x)=\ln x-x+a$.

- (1) 若 $f(x) \leq 0$, 求 a 的取值范围;

- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点 m, n , 且 $m < n$, 证明: $n+\frac{1}{n} < 2e^{a-1} < m+\frac{1}{m}$.

22. (12分)

已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ ($a>1$) 的左顶点和下顶点, P 为直线 $x=3$ 上

的动点, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最小值为 $\frac{59}{4}$.

- (1) 求 E 的方程;

- (2) 设 PA 与 E 的另一交点为 D , PB 与 E 的另一交点为 C , 问: 是否存在点 P , 使得四边形 $ABCD$ 为梯形, 若存在, 求 P 点坐标; 若不存在, 请说明理由.