

河北省“五个一名校联盟”2021 届高三第二次诊断考试

数 学

命题单位:保定市第一中学

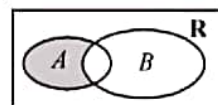
试卷满分:150 分 考试时长:120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x<1\}$, $B=\{x|x^2+x-6>0\}$, 则如图所示阴影区域表示的集合为



- A. $\{x|-2<x<1\}$ B. $\{x|-3<x<1\}$
C. $\{x|-2\leq x<1\}$ D. $\{x|-3\leq x<1\}$

2. 已知正实数 a, b 满足 $(a+bi)^2 = -7+24i$, 则复数 $a+bi$ 为

- A. $4+3i$ B. $4-3i$
C. $3+4i$ D. $3-4i$

3. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, M, N 分别是 SB, AC 的中点, 若 $SA=4, BC=2, MN\perp BC$, 则 MN 与 SA 所成的角为

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

4. 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{17}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值为

- A. $\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{9}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $-\frac{8}{9}$

5. 直线 $y=kx$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} =$

- A. $\frac{1}{1+k^2}$ B. $\frac{k^2}{1+k^2}$ C. 1 D. 2

6. 甲、乙、丙、丁四人过桥, 一次最多能过两个人, 四人只有一把手电(在桥上行走时需携带且打亮), 手电照明时间仅能维持二十分钟, 每个人单独过桥所需的时间分别为 1 分钟、2 分钟、5 分钟、10 分钟, 则四人全部过桥的最短时间为(若两人同时过桥, 必须相伴同行)

- A. 16 分钟 B. 17 分钟
C. 18 分钟 D. 19 分钟



7. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 A 在第一象限, 则

$$\frac{|AF|}{|FB|} =$$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. $\sqrt{3}$

8. 已知 $f(x)=x^2-(a-1)xe^{x-1}-(a+1)e^{2(x-1)}$ 恰有三个不同零点, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(1, e)$ B. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(0, 1)$ D. $(-1, \frac{1}{2})$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x, x\in\mathbf{R}$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有 2 个零点
 B. $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心
 C. $f(\frac{2\pi}{3}+x)=f(\frac{2\pi}{3}-x)$
 D. 要得到 $g(x)=2\cos(x+\frac{\pi}{4})$ 的图像, 可以将 $y=f(x)$ 图像上所有的点向左平移 $\frac{11}{12}\pi$ 个单位长度, 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=10, a_5=2$, 且 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$, 则下列结论正确的是

- A. $a_n=12-2n$ B. $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=\begin{cases} 30, n\leq 5 \\ n^2+5, n>5 \end{cases}$
 C. $|a_n|$ 的最小值为 0 D. 当且仅当 $n=5$ 时, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 取最大值 30

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+2)=f(x+6), f(x-2)=f(6-x)$, 当 $0\leq x\leq 2$ 时, $f(x)=2x^2-x$, 则下列说法正确的是

- A. $f(2021)=f(1)$ B. 函数 $f(x+2)$ 是偶函数
 C. 当 $0\leq x\leq 6$ 时, $f(x)$ 的最大值为 6 D. 当 $6\leq x\leq 8$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{4}$

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上有一点 P, F_1, F_2 分别为左、右焦点, $\angle F_1PF_2 = \theta, \triangle PF_1F_2$ 的面积为 S , 则下列选项正确的是

- A. 若 $\theta=60^\circ$, 则 $S=3\sqrt{3}$
 B. 若 $S=9$, 则 $\theta=90^\circ$
 C. 若 $\triangle PF_1F_2$ 为钝角三角形, 则 $S\in(0, \frac{9\sqrt{7}}{4})$
 D. 椭圆 C 内接矩形的周长范围是 $(12, 20]$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 五位同学站成一排, 其中 3 位女生, 2 位男生, 如果 2 位男生不能相邻, 且女生甲不能排第一个, 那么所有的排列总数为 _____. (用数字作答)



14. 某大学 2013 年在校本科生 4 500 人, 研究生 500 人, 预计在今后若干年内, 该学校本科生每年比上一年增长 12.5%, 研究生每年比上一年增长 50%, 则从_____年开始该校研究生的人数占该校本科生和研究生总人数比例首次达到 50% 以上. (参考数据: $\lg 2=0.3010$, $\lg 3=0.4771$)
15. 点 M 在 $\triangle ABC$ 内部, 满足 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$, 则 $S_{\triangle MAC}:S_{\triangle MAB}=\underline{\hspace{2cm}}$.
16. 设双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左右顶点分别为 A_1, A_2 , 与 A_2 不重合的点 P 在其右支上, 则直线 PA_2 与直线 PA_1 的斜率之积为_____. 若 $\angle A_1PA_2=3\angle PA_1A_2$, 则 $\angle PA_1A_2$ 的大小为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $(a+b)(\sin A - \sin B) = (b+c)\sin C$; ② $2\cos A(c\cos A + a\cos C) + b = 0$; ③ $\triangle ABC$ 的面积

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - b^2 - c^2)$ 三个条件中任选一个(填序号), 补充在下面的问题中, 并解答该问题.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , _____, D 是边 BC 上的一点, 且 $AD=2, AC=4$,

$\sin C = \frac{\sqrt{21}}{14}$, 求线段 BD 的长.

18. (12 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{n^2 + 5n}{2}$, 等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2 = a_2, b_3 = a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

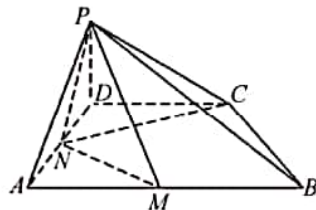
(2) 若 $c_n = \log_2 b_n$, 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n c_n}\right\}$ 的前 n 项和.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel DC, BC=CD=AD=2, AB=4$, M, N 分别是 AB, AD 的中点. 且 $PD \perp NC$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 证明: $PD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 已知三棱锥 $D-PAB$ 的体积为 $\frac{2}{3}$, 求二面角 $C-PN-M$ 的余弦值.



20. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 一顶点坐标为 $A(0, -2\sqrt{2})$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 已知 M, N 为椭圆上异于 A 的两点, 且 $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AN}$, 判断直线 MN 是否过定点? 若过定点, 求出此点坐标.

21. (12 分)

某中学有高一和高二两个乒乓球队, 每队各 9 人. 两队在过去的九场单打对抗赛中, 比赛结果统计数字如下:

场次	1	2	3	4	5	6	7	8	9
比赛结果	高二胜	高二胜	高一胜	高二胜	高一胜	高二胜	高二胜	高一胜	高二胜

两队队员商量下一次单打对抗赛的比赛形式, 提供了三种方案:

(1) 双方各出 3 人, 比三局;

(2) 双方各出 5 人, 比五局;

(3) 双方各出 7 人, 比七局.

(以上表中的高二队战胜高一队的频率作为高二队战胜高一队的概率) 三种方案均以比赛中获胜局数多的一方获胜. 问: 对高一年级来说, 哪种方案获胜率更高? 你能得出什么结论?

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = xe^{x-1} - a(\ln x + 1), a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

(2) 当 $a=2$ 时, 求证: $f(x) \geq x^2 - 2x$.



河北省“五个一名校联盟”2021 届高三第二次诊断考试 数学参考答案

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. D 2. C 3. A 4. D 5. C 6. B 7. B 8. D

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分。

9. AB 10. AC 11. ABC 12. ACD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 60 14. 2021 15. 3:4 16. $1, \frac{\pi}{10}$ (或 18°)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解:若选①, $(a+b)(a-b)=(b+c)c$, $\therefore b^2+c^2-a^2=-bc$, 2 分

$\therefore \cos A = -\frac{1}{2}$, $A \in (0, \pi)$, $\therefore A = \frac{2\pi}{3}$ 4 分

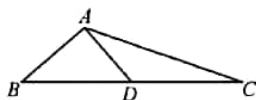
若选②, $2\cos A(\sin C \cos A + \sin A \cos C) + \sin B = 0$, $2\cos A \sin B + \sin B = 0$, 又 $\sin B \neq 0$, $\therefore \cos A = -\frac{1}{2}$ 2 分

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 4 分

若选③, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - b^2 - c^2)$, 结合余弦定理可得 $\frac{1}{2}bc \sin A = -\frac{\sqrt{3}}{2}bc \cos A$.

可得 $\sin A = -\sqrt{3} \cos A$, 可得 $\tan A = -\sqrt{3}$ 2 分

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 4 分



因为 $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{14}$, 所以 $\cos C = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, 在 $\triangle ABC$ 中,

$\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 5 分

在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理的 $\frac{AD}{\sin C} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$,

$\therefore \sin \angle ADC = \frac{AC \sin C}{AD} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\therefore \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 7 分

$\therefore \sin \angle ADB = \sin B$, $\therefore AB = AD = 2$, 8 分

在 $\triangle ADB$ 中, $\cos B = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD}$, $\therefore \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2^2 + BD^2 - 2^2}{2 \times 2 \times BD}$, $\therefore BD = \frac{8\sqrt{7}}{7}$ 10 分

18. 解: (1) $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$,

$n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n+2$, 又 a_1 适合上式, $\therefore a_n = n+2$, 3 分

$\therefore b_2 = a_2 = 4, b_3 = a_6 = 8$, 设 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,



$$q = \frac{b_3}{b_2} = 2, \therefore b_n = b_2 q^{n-2} = 2^n. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) c_n = \log_2 b_n = n, \frac{1}{a_n c_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right); \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设数列 $\left\{ \frac{1}{a_n c_n} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ;

$$T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 连接 DM , 显然 $DC \parallel BM$ 且 $DC = BM$,

$\therefore$ 四边形 $BCDM$ 为平行四边形,

$\therefore DM \parallel BC$ 且 $DM = BC$, $\therefore \triangle AMD$ 是正三角形, $\therefore MN \perp AD$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $\therefore MN \perp$ 平面 PAD ,

$\because PD \subset$ 平面 PAD , $\therefore PD \perp MN$, 又 $\because PD \perp NC$, 且 $MN \cap NC = N$,

$\therefore PD \perp$ 平面 $ABCD$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

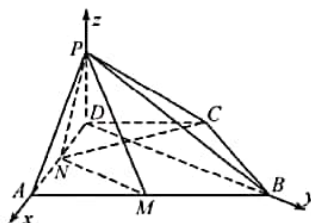
(2) 连接 BD , 易知 $BD \parallel MN$, $\therefore BD \perp AD$, $BD \perp PD$.

在 $Rt\triangle DAB$ 中, $DA^2 + DB^2 = AB^2$, $\therefore AD = 2$, $AB = 4$,

$$\therefore DB = 2\sqrt{3}, S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2} DA \cdot DB = 2\sqrt{3}$$

$$V_{D-PAB} = V_{P-DAB} = \frac{1}{3} PD \cdot S_{\triangle DAB} = \frac{1}{3} PD \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2}{3}, \therefore PD = \frac{\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

故建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0)$, $N(1,0,0)$, $C(-1,\sqrt{3},0)$, $M(1,\sqrt{3},0)$, $P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3})$,

$$\overrightarrow{PN} = (1,0,-\frac{\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{NC} = (-2,\sqrt{3},0), \overrightarrow{NM} = (0,\sqrt{3},0),$$

设平面 PNC 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{NC} \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} z_1 = 0 \\ -2x_1 + \sqrt{3} y_1 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} x_1 \\ y_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} x_1 \end{cases} \therefore \mathbf{n}_1 = (1, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}); \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 PNM 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{NM} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} z_2 = 0 \\ \sqrt{3} y_2 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} z_2 = \sqrt{3} x_2 \\ y_2 = 0 \end{cases} \therefore \mathbf{n}_2 = (1, 0, \sqrt{3}); \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$



$$\therefore \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1 + 3 = 4, |\mathbf{n}_1| = \frac{4\sqrt{3}}{3}, |\mathbf{n}_2| = 2,$$

$$\text{设二面角 } C-PN-M \text{ 所成的角为 } \theta, \cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20. \text{ 解: (1) 椭圆离心率为 } \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore A(0, -2\sqrt{2}), \therefore b^2 = 8, a^2 = 16, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 直线 MN 斜率不存在时, 不合题意,

设直线 MN 方程为 $y = kx + m, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 = 16 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 16 = 0,$$

$$\Delta = (4km)^2 - 4(1 + 2k^2)(2m^2 - 16) = 128k^2 + 64 - 8m^2 > 0,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1 + 2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 16}{1 + 2k^2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (x_1, y_1 + 2\sqrt{2}) \cdot (x_2, y_2 + 2\sqrt{2})$$

$$= x_1 x_2 + (kx_1 + m + 2\sqrt{2})(kx_2 + m + 2\sqrt{2})$$

$$= (1 + k^2)x_1 x_2 + k(m + 2\sqrt{2})(x_1 + x_2) + (m + 2\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{3m^2 + 4\sqrt{2}m - 8}{1 + 2k^2} = 0, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } m = -2\sqrt{2} \text{ 或 } m = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

若直线方程为 $y = kx - 2\sqrt{2}$, 则直线过定点 $(0, -2\sqrt{2})$, 与 A 重合, 不合题意;

若直线方程为 $y = kx + \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则直线过定点 $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$.

综上, 直线过定点 $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$21. \text{ 解: 由题意知, 高二每位队员战胜高一每位队员的概率为 } \frac{2}{3}, \text{ 即每场比赛高一队获胜的概率为 } \frac{1}{3}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

方案一高一年级获胜的概率:

$$P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{27} \approx 0.259; \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

方案二高一年级获胜的概率:

$$P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{17}{81} \approx 0.210; \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

方案三高一年级获胜的概率:

$$P(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + C_4^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} + C_4^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + C_4^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{379}{2187} \approx 0.173. \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore P(A) > P(B) > P(C)$$

所以对高一年级来说, 方案一更有利.



结论:因为高一年级每位队员获胜的概率为 $\frac{1}{3}$,概率低于高二年级,所以比赛次数越少,高一年级侥幸获胜的概率越大.

当双方实力有差距时,所比局数越少,对实力弱的一方越有利. 12 分

22. 解:(1) $f'(x)=(x+1)e^{x-1}-\frac{a}{x}$,因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,

$f'(x)\geq 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,即 $a\leq x(x+1)e^{x-1}$ 2 分

令 $h(x)=x(x+1)e^{x-1}=(x^2+x)e^{x-1}$,

$h'(x)=(x^2+3x+1)e^{x-1}>0$,所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,

所以 $h(x)>h(1)=2$,即 $a\leq 2$ 5 分

(2)要证 $xe^{x-1}-2(\ln x+1)\geq x^2-2x$,

即证明 $\frac{e^{x-1}}{x}-1\geq \frac{2[\ln x-(x-1)]}{x^2}$, 7 分

令 $F(x)=\frac{e^{x-1}}{x}-1$,由 $F'(x)=\frac{e^{x-1}x-e^{x-1}}{x^2}>0$ 得 $x>1$, $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 上单调递减, 8 分

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值 $F(1)=0$, 9 分

令 $G(x)=\ln x-(x-1)$,由 $G'(x)=\frac{1}{x}-1>0$,得 $0<x<1$, 10 分

所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 单调递减,最大值为 $G(1)=0$,所以 $\frac{2[\ln x-(x-1)]}{x^2}\leq 0$, 11 分

$\frac{e^{x-1}}{x}-1\geq 0\geq \frac{2[\ln x-(x-1)]}{x^2}$,原不等式成立. 12 分

