

2021届高三第二次江西名校联考

理科数学

命题学校:临川一中 命题人:罗正国 审题人:孔令润

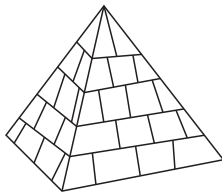
试卷满分:150分 考试时长:120分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

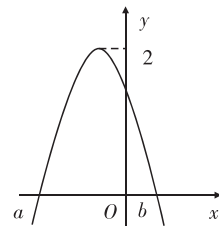
一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $z=i(1-i)$ (i 是虚数单位),则复数 $\bar{z}$ 的虚部为
A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i
2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2+x-6\leq 0\}$, $B=\{x|y=\ln(x+1)\}$,则 $A\cap B$ 中的元素个数为
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 埃及胡夫金字塔是世界七大奇迹之一,它的形状可视为一个正四棱锥,现已测得它的塔倾角为 52° ,则该四棱锥的高与底面正方形的边长的比值为(注:塔倾角是指该四棱锥的侧面与底面所成的二面角,参考数据:
 $\cos 52^\circ\approx\frac{3}{5}$)



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{5}$
4. 双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线相互垂直,则其焦距长为
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$
5. 函数 $f(x)=e^{2x}-\sin x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为
A. $y=x-1$ B. $y=2x+1$ C. $y=2x-1$ D. $y=x+1$
6. 若 $(1+x)(1-2x)^{2020}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2021}x^{2021}$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2021}=\quad$
A. 0 B. 2 C. -1 D. 1
7. 以下四组不等式中正确的是
A. $\log_{2.8} e > \ln 2.8$ B. $0.4^{0.2} < 0.3^{0.2}$
C. $e^\pi > \pi^e$ D. $\sqrt{\pi} \ln 3 > \sqrt{3} \ln \pi$

8. 如图是函数 $f(x) = A\cos(2x + \varphi)$ ($A > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 图象的一部分, 对不同的 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 有 $f(x_1 + x_2) = \sqrt{3}$, 则



- A. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ 上是增函数
 B. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ 上是减函数
 C. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 上是增函数
 D. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 上是减函数
9. 已知过抛物线 $y^2 = 4\sqrt{2}x$ 焦点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $\triangle AOB$ (O 为坐标原点) 的面积为

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n$, 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)2^{n-1}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_n < t$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则实数 t 的最小值为

- A. 1 B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, $\angle BAC = 120^\circ$, $PB = PC = 2\sqrt{6}$, $PA = 2\sqrt{5}$, 则该三棱锥的外接球的表面积为
- A. 40π B. 20π C. 80π D. 60π
12. 已知函数 $f(x) = \ln x$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $[f(x_1) - f(x_2)](x_1^2 - x_2^2) > k(x_1x_2 + x_2^2)$ 恒成立, 则实数 k 的最大值是

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, m)$, $\mathbf{b} = (2, -3)$, 若 $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $m =$ _____.

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ 2x - y - 3 \leq 0, \\ x + y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + 2y$ 的最大值是 _____.

15. 甲、乙两人在我校举行的“传承红色经典, 纪念抗美援朝 70 周年”演讲比赛中, 6 位评委的评分情况如下方茎叶图所示, 其中甲的成绩的中位数是 82, 乙的成绩的平均数是 84, 若正实数 a, b 满足: $x, \frac{a+b}{2}, y$ 成等差数列, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值为 _____.

甲			乙	
8	5	7	3	8
7	4	8	3	y
	2	9	1	5

16. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知 AB 是圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 的一条弦, 且 $AC \perp BC$, M 是 AB 的中点. 当弦 AB 在圆 C 上运动时, 直线 $l: 3x - 4y - 9 = 0$ 上总存在 P, Q 两点, 使得 $\angle PMQ \geq \frac{\pi}{2}$ 恒成立, 则线段 PQ 长度的取值范围是 _____.

三、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\cos 2B - 6\cos^2 \frac{A+C}{2} + 2 = 0$.

(1)求角 B 的大小;

(2)若 $b = \sqrt{10}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$,求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

时值金秋十月,秋高气爽,我校一年一度的运动会拉开了序幕. 为了增加运动会的趣味性,大会组委会决定增加一项射击比赛,比赛规则如下:向甲、乙两个靶进行射击,先向甲靶射击一次,命中得 2 分,没有命中得 0 分;再向乙靶射击两次,如果连续命中两次得 3 分,只命中一次得 1 分,一次也没有命中得 0 分. 小华同学准备参赛,目前的水平是:向甲靶射击,命中的概率是 $\frac{3}{5}$;向乙靶射击,命中的概率为 $\frac{2}{3}$. 假设小华同学每次射击的结果相互独立.

(1)求小华同学恰好命中两次的概率;

(2)求小华同学获得总分 X 的分布列及数学期望.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = me^{2x} + (m+2)e^x - 2x, m > 0$.

(1)当 $m=1$ 时,求 $f(x)$ 的极值;

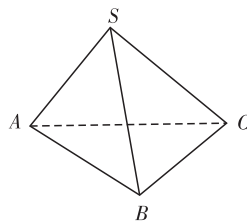
(2)当 $m \leq 1$ 时,求函数 $g(x) = -f(x) + 4e^x - x$ 极大值 $h(m)$ 的最小值.

20. (12 分)

如图,在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA = SB = SC = m$. 若 $\angle BSC = \theta, \angle CSA = \beta, \angle ASB = \gamma$, 且 $\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = \sin^2 \frac{\gamma}{2}$.

(1)证明:平面 $SAB \perp$ 平面 ABC ;

(2)若 $\theta = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{2\pi}{3}$, 试问在线段 SC 上是否存在点 D , 使直线 BD 与平面 SAB 所成的角为 60° . 若存在,请求出 D 点的位置;若不存在,请说明理由.



21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{14}}{2})$, O 坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 圆 $x^2 + y^2 = \frac{8}{3}$ 的一条切线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点,

求: ① $\angle AOB$ 的值;

② $|AB|$ 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \varphi \\ y = 2 + 2\sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos \theta$.

(1) 求曲线 C_1 与曲线 C_2 两交点所在直线的极坐标方程;

(2) 若直线 l_1 过点 $P(1, 2)$ 且与直线 $l: 2\rho\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$ 平行, 直线 l_1 与曲线 C_1 相交于 A, B 两点,

求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 3| + m|x + 1|$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;

(2) $\forall x \in [-3, 0]$, 不等式 $f(x + 1) + m < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.