

NCS20210607 项目第二次模拟测试卷

理科数学

本试卷共 4 页, 23 小题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟。
 注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上, 并在相应位置贴好条形码。
 2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案。
 3. 非选择题必须用黑色水笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来答案, 然后再写上新答案, 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
 4. 考生必须保证答题卡整洁。考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。
- 一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 z 对应复平面上的点 $Z(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 z^2 在复平面上对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | (x+y+1)(2x-y+1) = 0\}$, 则集合 A 中元素个数是

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无数个

3. 从编号依次为 01, 02, ..., 20 的 20 人中选取 5 人, 现从随机数表的第一行第 3 列和第 4 列数字开始, 由左向右依次选取两个数字, 则第五个编号为

5308	3395	5502	6215	2702	4369	3218	1826	0994	7846
5887	3522	2468	3748	1685	9527	1413	8727	1495	5656

- A. 09 B. 02 C. 15 D. 18

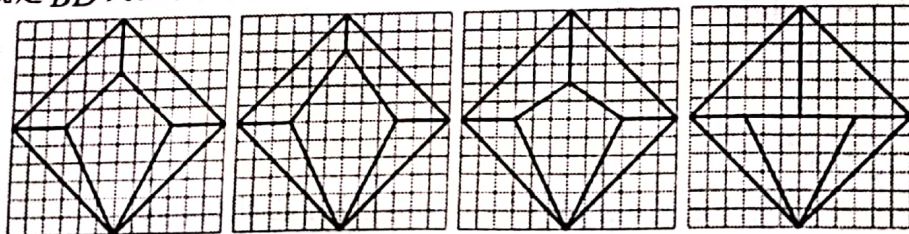
4. 心脏每跳动一次, 就完成一次收缩和舒张。心脏跳动时, 血压在增大或缩小, 并呈周期性变化, 血压的最大值和最小值分别称为收缩压和舒张压。某人的血压满足函数 $p(t) = 110 + 25\sin(150\pi t)$, 其中 $p(t)$ 为血压 (单位: mmHg), t 为时间 (单位: min), 则相邻的收缩压和舒张压的时间间隔是

- A. $\frac{1}{150}$ B. $\frac{1}{110}$ C. $\frac{1}{70}$ D. $\frac{1}{75}$

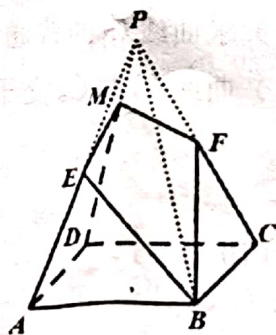
5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 = 2, a_2 + a_5 = 4$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项和 $S_6 =$

- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

6. 如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 12, $AB = 6\sqrt{2}$, E, F 分别为 PA, PC 的中点, 过点 B, E, F 的截面交 PD 于点 M , 截面 $EBFM$ 将四棱锥分成上下两个部分, 规定 $\overline{BD}$ 为主视图方向, 则几何体 $CDAB-FME$ 的俯视图为



A B C D



7. 已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, P 是抛物线上的一个动点, $A(3, 1)$, 则 $\triangle APF$ 周长的最小值为

- A. $2 + 2\sqrt{5}$ B. $4 + \sqrt{5}$ C. $3 + \sqrt{5}$ D. $6 + \sqrt{5}$



8. 已知 $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in (0, 1) \\ \log_a x, & x \in [1, 2) \end{cases}$, 若 $f(x) = \frac{a}{2}$ 有两解, 则 a 的取值范围是
- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, \frac{1}{2}]$ C. $(1, 2]$ D. $(1, 2)$

9. 已知 $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$, 则“ $x_1 + x_2 = 0$ ”是“ $f(x_1) + f(x_2) = 2$ ”的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 将双曲线绕其对称中心旋转, 会得到我们熟悉的函数图象, 例如将双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的图象

绕原点逆时针旋转 45° 后, 能得到反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象

(其渐近线分别为 x 轴和 y 轴); 同样的, 如图所示, 常见的

“对勾函数” $y = mx + \frac{n}{x} (m > 0, n > 0)$ 也能由双曲线的

图象绕原点旋转得到 (其渐近线分别为 $y = mx$ 和 y 轴).

设 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}, n = \sqrt{3}$, 则此“对勾函数”所对应的双曲线的实轴长为

- A. $2\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{7}$ C. $4\sqrt{3}$ D. 4

11. 四面体 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ, AD = 4, BC = 2$, 且 AB 与 CD 所成角为 60° , 则该四面体的外接球表面积为

- A. 10π B. 16π C. 18π D. 20π

12. 已知直线 $l_0: \frac{x}{a+1} + \frac{y}{a+7} = 1, l_n: \frac{x}{6n-8-a} + \frac{y}{6n-2-a} = 1$ (a 为常数, $n = 1, 2, 3, \dots$),

点 (a_n, a_{n+1}) 是 l_0 与 l_n 的交点, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为

- A. 320 B. 360 C. 590 D. 600

二. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

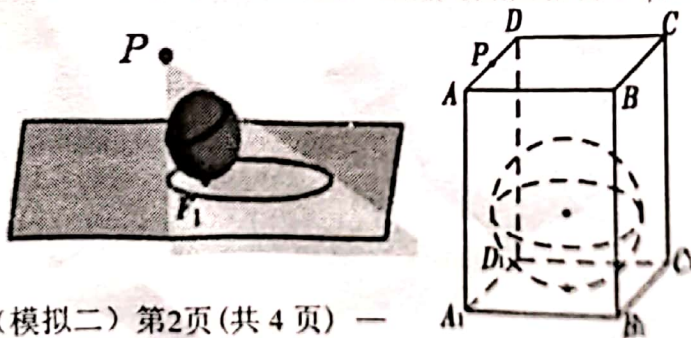
13. 已知 $\vec{a} = (-1, 2), \vec{b} = (3, -1)$, 则与 $\vec{a} - \vec{b}$ 同方向的单位向量是_____.

14. 某学科视导团有三名男专家和两名女专家, 安排到五所学校进行教学视导, 这五所学校中省级重点中学有三所, 省级建设重点中学有两所, 要求每所学校各派一位专家, 两类学校都要有男专家, 则不同的分派方案有_____种 (结果用数字作答).

15. 若函数 $f(x) = \frac{x^2 + a}{x+1}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. 通过研究发现: 点光源 P 斜照射球, 在底面上形成的投影是椭圆, 且球与底面相切于椭圆的一个焦点 F_1 (如左图所示), 右图是底面

边长为 2、高为 3 的正四棱柱, 一实心小球与正四棱柱的下底面及四个侧面均相切, 若点光源 P 位于 AD 的中点处时, 则在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的投影形成的椭圆的离心率是_____.



三. 解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 在钝角 $\triangle ABC$ 中, A 为钝角, 角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , $\sin A = \cos B$, $C = 2B$.

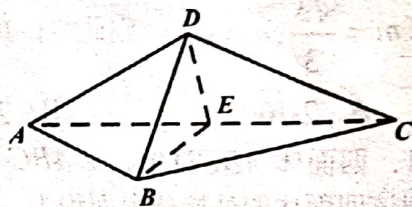
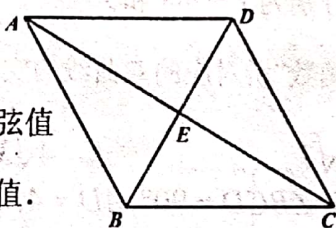
(I) 求角 C ;

(II) 若 $c = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分) 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长为 4, 对角线交于点 E , $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起得到三棱锥 $D-ABC$.

(I) 求证: 平面 $DBE \perp$ 平面 ABC ;

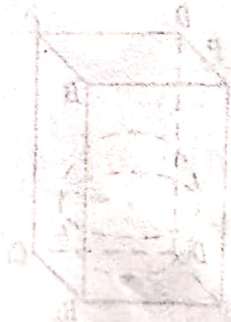
(II) 若 CD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求二面角 $D-BC-E$ 的余弦值.



19. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆 E 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C, D 两点, 四边形 $ACBD$ 的面积为 4.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 若 P 是椭圆 E 上一点 (不在坐标轴上), 直线 PC, PD 分别与 x 轴相交于 M, N 两点, 设 PC, PD, OP 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 过点 P 的直线 l 的斜率为 k , 且 $k_1 k_2 = k k_3$, 直线 l 与 x 轴交于点 Q , 求 $|MQ| - |NQ|$ 的值.



20. (12分) 某电台举办有奖知识竞赛, 选手答题规则相同. 甲每道题自己有把握独立答对的概率为 $\frac{1}{2}$, 若甲自己没有把握答对, 则在规定时间内连线亲友团寻求帮助, 其亲友团每道题能答对的概率为 p , 假设每道题答对与否互不影响.

(I) 当 $p = \frac{1}{5}$ 时,

(i) 若甲答对了某道题, 求该题是甲自己答对的概率;

(ii) 甲答了4道题, 计甲答对题目的个数为随机变量 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望 EX ;

(II) 乙答对每道题的概率为 $\frac{2}{3}$ (含亲友团), 现甲乙两人各答两个问题, 若甲答对题目的个数比乙答对题目的个数多的概率不低于 $\frac{15}{36}$, 求甲的亲友团每道题答对的概率 p 的最小值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x \sin x - a \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$) 的图象在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为 -1 .

(I) 求证: $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) > 0$;

(II) 求证: $\frac{3}{2} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}) + \frac{4}{3} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}) + \cdots + \frac{n+1}{n} \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}) > \pi \ln \frac{n+1}{2}$. ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$).

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 $C_2: xy = \sqrt{3}$. 以原点 O 为极点, x 的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的极坐标方程;

(II) 曲线 C_1 与 C_2 交于 A, B, C, D 四点, 求以 A, B, C, D 为顶点的四边形 $ABCD$ 的面积.

23. (10分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $f(x) = |x - a + 1| + |x + b - 1|$ 的最小值是 c . (其中 a, b 都是 0 到 1 之间的正数)

(I) 求 $a + b + c$ 的值;

(II) 证明: $a^2 + 2ab + 4bc + 2ac \leq 4$.

