NCS20210607 项目第一次模拟测试卷

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	D	C	C	D	A	B	B	A	B	C

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分，满分 20 分.

13. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　14. -160　　15. 0.817　　16. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤． 第 17 题–21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17.【解析】（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公差为d，因为a_1,a_4,a_{13}成等比数列，

所以$3(3+12d)=(3+3d)^2$，即$d^2-2d=0$，　　………………………2 分

解得$d=0$（舍去）或$d=2$，　　………………………4 分

所以$a_n=2n+1$；　　………………………6 分

（Ⅱ）$b_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，　　………………………8 分

所以$S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$　　………………………10 分

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.　　………………………12 分

18.【解析】（Ⅰ）因为侧面AA_1C_1C是矩形，所以$AC\perp CC_1$，　　………………………1 分

又由条件$AC\perp BC$，$BC\cap CC_1=C$，所以$AC\perp$平面CC_1B_1B，

$BB_1\subseteq$平面CC_1B_1B，所以$AC\perp BB_1$，　　………………………3 分

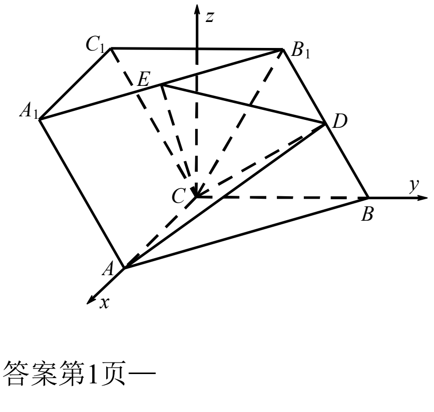
又因为侧面BB_1C_1C是菱形，$\angle B_1BC=60°$，

D是BB_1的中点，所以$BB_1\perp CD$，　　………………………5 分

且$AC\cap CD=C$，所以$BB_1\perp$平面ACD.　　………………………6 分

（Ⅱ）因为$AC\perp$平面CC_1B_1B，所以平面$BB_1C_1C\perp$平面ABC，

如图以C为原点，CA,CB所在直线分别为x轴，y轴，过点C在平面内BB_1C_1C且垂直CB的直线为z轴，建立空间直角坐标系$C-xyz$，则$A(2,0,0)$，



$B(0,2,0),B_1(0,1,\sqrt{3}),C_1(0,-1,\sqrt{3})$，$D(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC_1}=(2,-1,\sqrt{3})$，所以$E\ (1,0,\sqrt{3})$…8 分

平面ACD的一个法向量为$\overrightarrow{BB_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，

设平面ECD的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{CE}\Rightarrow(x,y,z)\cdot(1,0,\sqrt{3})=0\Rightarrow x+\sqrt{3}z=0$，

$\vec{n} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow (x,y,z)\cdot(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})=0 \Rightarrow \sqrt{3}y+z=0$，

令 $y=1 \Rightarrow z=-\sqrt{3}, x=3 \Rightarrow \vec{n}=(3,1,-\sqrt{3})$，（两平面法向量各一分） ……………11 分

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{BB_1}>=\dfrac{-4}{2\times\sqrt{9+1+3}}=-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，

所以所求二面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$． ……………………12 分

19. 【解析】（Ⅰ）$b=2$ 时，$f(x)=(x-2)e^x-\dfrac{a}{2}(x-1)^2$，

$f'(x)=(x-1)e^x-a(x-1)=(x-1)(e^x-a)$， ……………………2 分

因为 $a>0$，所以：

①若 $\ln a<1$ 即 $0<a<e$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $\ln a<x<1$，

由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$ 或 $x<\ln a$；

②若 $\ln a>1$ 即 $a>e$ 时，$f'(x)<0$ 得 $1<x<\ln a$，

$f'(x)>0$ 得 $x<1$ 或 $x>\ln a$；

③若 $\ln a=1$ 即 $a=e$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，（每步讨论各 1 分）……………………5 分

故当 $0<a<e$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(\ln a,1)$，单调增区间为 $(-\infty,\ln a),(1,+\infty)$；

当 $a>e$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(1,\ln a)$，单调增区间为 $(-\infty,1),(\ln a,+\infty)$；

当 $a=e$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增； ……………………6 分

（Ⅱ）$f'(x)=(x-b+1)(e^x-a)$，由已知 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

则 $(x-b+1)(e^x-a)\ge 0$ 恒成立，由讨论可知 $b-1=\ln a$，即 $b=\ln a+1$， ………8 分

而待证不等式为 $b\le e^{a-1}$，故只需证明 $\ln a+1\le e^{a-1}$．

证明：设 $g(a)=e^{a-1}-\ln a-1$，则 $g'(a)=e^{a-1}-\dfrac{1}{a}$， ……………………9 分

因为 $g'(a)$ 单调递增，且 $g'(1)=0$，故当 $g'(a)<0$ 时 $0<a<1$；

当 $g'(a)>0$ 时 $a>1$，即 $g(a)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

则 $g(a)\ge g(1)=0$， 得 $\ln a+1\le e^{a-1}$，即不等式得证． ……………………12 分

20.【解析】（Ⅰ）该同学答对 3 个题有两种情况，

第一种情况是第一类题对 1 个，第二类题对 2 个；$P_1=\dfrac{C_4^1}{C_5^2}\times(\dfrac{3}{4})^2=\dfrac{9}{40}$， …… 2 分

第二种情况是第一类题对 2 个，第二类题对 1 个，$P_2=\dfrac{C_4^2}{C_5^2}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{40}$， ……5 分

所以概率为：$P=\dfrac{C_4^1}{C_5^2}\times(\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{C_4^2}{C_5^2}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{20}$； ……………………6 分

（Ⅱ）若小明后三题选择从第一类题中抽取 1 道，从第二类题中抽取 2 道进行作答，

设后三题得分为 X 分，则 X 的所有可能取值为：$-10,0,15,25,40,50$，则

$P(X=-10)=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{64}$； $P(X=0)=\frac{3}{4}\times(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{64}$；

$P(X=15)=\frac{1}{4}\times C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{64}$； $P(X=25)=\frac{3}{4}\times C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{18}{64}$；

$P(X=40)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$ ； $P(X=50)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$；（每个概率 0.5 分）

$\therefore EX=(-10)\times\frac{1}{64}+15\times\frac{6}{64}+25\times\frac{18}{64}+40\times\frac{9}{64}+50\times\frac{27}{64}=35$； ………9 分

若小明后三题选择从第二类题中抽取3道进行作答，设后三题答对Z道，得分为Y分，则$Z\sim B(3,\frac{3}{4})$，$Y=20\times Z-5\times(3-Z)=25Z-15,$

所以$EY=25EZ-15=25\times\frac{9}{4}-15=\frac{165}{4}$， ………………………11 分

所以$EX<EY$，即后三题应都从第二类题中抽取作答，得分期望会高. ………12 分

（另解）若后面三个题都选择难题：记这三个题答对的个数为X，则$X\sim B(3,\frac{3}{4})$，

$EX=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$，总得分期望是$10+20\times\frac{9}{4}-5\times\frac{3}{4}=\frac{205}{4}$分， ………………………8 分

若后面三个题选择一个中等题、两个难题：

则中等题总得分期望是：$10+10\times\frac{3}{4}=\frac{35}{2}$分，

记两个难题答对题数为Y，则$Y\sim B(2,\frac{3}{4})$，则$EY=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$，

则两个难题得分期望是$20\times\frac{3}{2}-5\times\frac{1}{2}=\frac{55}{2}$，

此时，总得分期望是$\frac{35}{2}+\frac{55}{2}=45$分， ………………………11 分

因为$\frac{205}{4}>45$，所以后面三个题应该都选择难题. ………………………12 分

21.【解析】（Ⅰ）由点$A(x_1,y_1)$，$R(x_1,-1)$坐标，知AR与直线$y=-1$垂直，
F,R关于过点A的直线l'对称，可得$|AF|=|AR|$， ………………………………2 分

所以直线$y=-1$为抛物线准线，所以$p=4$，抛物线方程为$x^2=4y$， ………4 分

因此点$F(0,1)$，所以$k_{FR}=-\frac{2}{x_1}$，从而直线l'的斜率为$\frac{x_1}{2}$，

又抛物线方程为$y=\frac{x^2}{4}$，得$y'=\frac{x}{2}$，所以过点A的切线斜率为$\frac{x_1}{2}$，

所以l'为抛物线切线得证; ………………………………6 分

（Ⅱ）设$B(x_B,y_B),C(x_C,y_C),D(x_D,y_D)$，$G(0,t)$.

由题意 $k_{RF}=k_{AG}$，$\dfrac{t-y_1}{-x_1}=-\dfrac{2}{x_1}$，得 $t=y_1+2$， ……………………………7 分

因为 $y_1>0$，所以 $t>2$，

令直线 AB 方程为 $y=kx+1\left(k\neq 0\right)$，

联立 $\begin{cases}x^2=4y\\ y=kx+1\end{cases}$，并化简得 $x^2-4kx-4=0$，得到 $x_1x_B=-4$，即 $x_B=-\dfrac{4}{x_1}$， ……8 分

设直线 AC 方程：$y=k_1x+t$，

联立 $\begin{cases}x^2=4y\\ y=k_1x+t\end{cases}$，得 $x^2-4k_1x-4t=0$，则 $x_1x_C=-4t$，即 $x_C=-\dfrac{4t}{x_1}$， ……9 分

同理可得 $x_Bx_D=-4t$，因此 $x_D=\dfrac{-4t}{x_B}=tx_1$， ……………………………10 分

由 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\frac{1}{2}|CG||DG|\sin\angle CGD}{\frac{1}{2}|AG||BG|\sin\angle AGB}=\dfrac{|x_Cx_D|}{|x_Ax_B|}=\dfrac{|-\frac{4t}{x_1}||tx_1|}{|x_1||-\frac{4}{x_1}|}=t^2>4$，

所以 $\dfrac{S_2}{S_1}$ 的取值范围是 $(4,+\infty)$． ……………………………12 分

22. 【解析】（Ⅰ）由已知，$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{x-2y}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{2x+y}{5}\end{cases}$，消参可得 $C:x^2+y^2=5$， …………3 分

$l:\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta=\sqrt{2}\Rightarrow x+y-2=0$． …………5 分

（Ⅱ）P 在直线 l 上，且 l 的斜率为 -1，故设 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数）

将其代入 C 的普通方程可得：$t^2-2\sqrt{2}t-1=0$，则 $t_1+t_2=2\sqrt{2}$，$t_1t_2=-1$ ……8 分

故 $||PA|-|PB||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=2\sqrt{2}$． ……………………………10 分

23.【解析】（Ⅰ）当 $a=2$ 时，不等式 $f(x)>3$ 为 $|x-1|+|2x+2|>3$，

当 $x\le -1$ 时，$(1-x)+(-2x-2)>3$，此时 $x<-\dfrac{4}{3}$；

当 $-1<x\le 1$ 时，$(1-x)+(2x+2)>3$，此时 $0<x\le 1$；

当 $x>1$ 时，$(x-1)+(2x+2)>3\Rightarrow x>\dfrac{2}{3}$，此时 $x>1$； （每步讨论各一分）

所以，当$a=2$时，不等式$f(x)>3$的解集为$\{x\mid x<-\frac{4}{3}$或$x>0\}$.　　…………5分

（Ⅱ）由$a>0$，知$-\frac{2}{a}<1$，讨论如下：

当$x<-\frac{2}{a}$，$f(x)=1-x-ax-2=-(1+a)x-1$，由$-(1+a)<0$，知$f(x)>f(-\frac{2}{a})$，

则$f(x)\ge\frac{5}{2}$恒成立等价于$f(-\frac{2}{a})\ge\frac{5}{2}$，解得$0<a\le\frac{4}{3}$；

当$-\frac{2}{a}\le x\le1$，$f\left(x\right)=1-x+ax+2=\left(a-1\right)x+3$，

则$f(x)\ge\frac{5}{2}$恒成立等价于$\begin{cases}f(-\frac{2}{a})\ge\frac{5}{2}\\ f(1)\ge\frac{5}{2}\end{cases}$，解得$\frac{1}{2}\le a\le\frac{4}{3}$；

当$x>1$，$f(x)=x-1+ax+2=(1+a)x+1$，$(1+a)>0$，故$f(x)>f(1)$，

则$f(x)\ge\frac{5}{2}$恒成立等价于$f(1)\ge\frac{5}{2}$，解得$a\ge\frac{1}{2}$；　　（每步讨论1.5分）

综上，$a\in[\frac{1}{2},\frac{4}{3}]$.　　……………………………10分

（另解）由性质可知，函数$f(x)$的最小值在$x=1$或$x=-\frac{2}{a}$取到，　　…………7分

故$\begin{cases}f(1)\ge\frac{5}{2}\\ f(-\frac{2}{a})\ge\frac{5}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}a+2\ge\frac{5}{2}\\ \frac{2}{a}+1\ge\frac{5}{2}\end{cases}$，解得$\frac{1}{2}\le a\le\frac{4}{3}$.　　……………………………10分