

NCS20210607 项目第一次模拟测试卷

理科数学

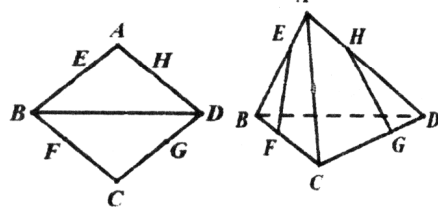
本试卷共 4 页, 23 小题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上, 并在相应位置贴好条形码.
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案.
3. 非选择题必须用黑色水笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来答案, 然后再写上新答案, 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.
4. 考生必须保证答题卡整洁. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回.

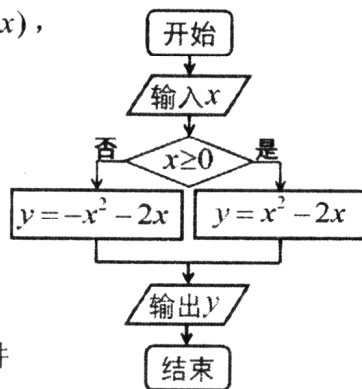
一. 选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{y | y = \sin x\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$
A. $[-1, 0]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 2]$ D. $[0, 1]$
2. 复数 z 满足 $zi = 2 + 3i$, 则 $|z| =$
A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{13}$ D. $3\sqrt{2}$
3. 已知椭圆 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 的左顶点为 A , 上顶点为 B , 则 $|AB| =$
A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 4 D. $\sqrt{7}$
4. 如图, E, F, G, H 分别是菱形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 上的点, 且 $BE = 2AE$, $DH = 2HA$, $CF = 2FB$, $CG = 2GD$, 现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 得到空间四边形 $ABCD$, 在折起过程中, 下列说法正确的是
A. 直线 EF, HG 有可能平行
B. 直线 EF, HG 一定异面
C. 直线 EF, HG 一定相交, 且交点一定在直线 AC 上
D. 直线 EF, HG 一定相交, 但交点不一定在直线 AC 上
5. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足 $a = 2\sqrt{3}$, $B = 45^\circ$, $C = 75^\circ$, 则 $b =$
A. 2 B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$



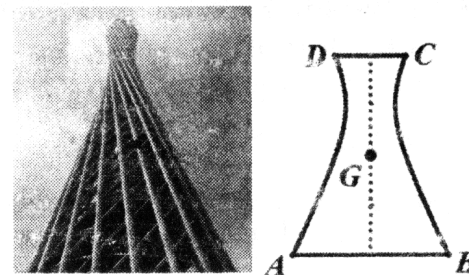
6. 如图, 将框图输出的 y 看成输入的 x 的函数, 得到函数 $y = f(x)$, 则 $y = f(x)$ 的图象

- A. 关于直线 $x = 1$ 对称
- B. 关于直线 $x = -1$ 对称
- C. 关于 y 轴对称
- D. 关于点 $(0, 0)$ 对称



7. 已知直线 l 的方程是 $2x + y + m = 0$, 则“原点 O 在直线 l 的右上方”是“点 $A(2, -1)$ 在直线 l 的右上方”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
8. 已知正数 a, b, c 满足 $2^a = b^2 = \log_2 c = k (4 < k < 16)$, 则
A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

9. 许多建筑融入了数学元素, 更具神韵, 数学赋予了建筑活力, 数学的美也被建筑表现得淋漓尽致. 已知右侧左图是单叶双曲面 (由双曲线绕虚轴旋转成立体图形) 型建筑, 右图是其中截面最细附近的部分图象, 上、下底面与地面平行. 现测得下底直径 $AB = 20\sqrt{10}$ 米, 上底直径 $CD = 20\sqrt{2}$ 米, AB 与 CD 间的距离为 80 米, 与上下底面等距离的 G 处的直径等于 CD , 则最细部分处的直径为

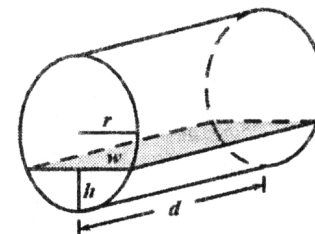


- A. 10 米 B. 20 米 C. $10\sqrt{3}$ 米 D. $10\sqrt{5}$ 米

10. 已知 $\sin(\frac{5\pi}{6} - 2x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$, 则 $\sin(\frac{2\pi}{3} - x) =$

- A. $-\frac{1}{2}$ 或 1
- B. $\frac{1}{2}$ 或 -1
- C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 1
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 -1

11. 如图所示某加油站地下圆柱体储油罐示意图, 已知储油罐长度为 d , 截面半径为 r (d, r 为常量), 油面高度为 h , 油面宽度为 w , 储油量为 v (h, w, v 为变量), 则下列说法:



- ① w 是 v 的函数
- ② v 是 w 的函数
- ③ h 是 w 的函数
- ④ w 是 h 的函数

其中正确的个数是

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

12. 已知 $f(x) = |x + a| - \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的最小值为 0, 则正实数 a 的最小值是

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. 1

二. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

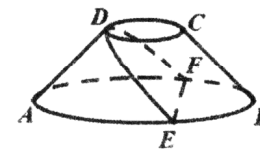
13. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角的余弦值为_____.
14. $(2 - x)^n$ 的展开式中只有第 4 项的二项式系数最大, 则展开式中 x^3 的系数为_____.

15. 2020 年, 全球展开了某疫苗研发竞赛, 我国处于领先地位, 为了研究疫苗的有效率, 在某地进行临床试验, 对符合一定条件的 10000 名试验者注射了该疫苗, 一周后有 20 人感染, 为了验证疫苗的有效率, 同期, 从相同条件下未注射疫苗的人群中抽取 2500 人, 分成 5 组, 各组感染人数如下:

调查人数 x	300	400	500	600	700
感染人数 y	3	3	6	6	7

并求得 y 与 x 的回归方程为 $\hat{y} = 0.011x + a$. 同期, 在人数均为 10000 的条件下, 以拟合结果估算未注射疫苗的人群中感染人数, 记为 N ; 注射疫苗后仍被感染的人数记为 n , 则估计该疫苗的有效率为_____. (疫苗的有效率为 $1 - \frac{n}{N}$; 参考数据: $109.5^{-1} \approx 0.009132$; 结果保留 3 位有效数字)

16. 如图, $ABCD$ 是圆台的轴截面, $AB = 3CD = 6$, $AD = 2\sqrt{2}$, 过点 D 与 AD 垂直的平面交下底圆于 E, F 两点, 则四面体 $CDEF$ 的体积为_____.



三. 解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 为公差不为 0 的等差数列, 且 $a_1 = 3$, a_1, a_4, a_{13} 成等比数列.

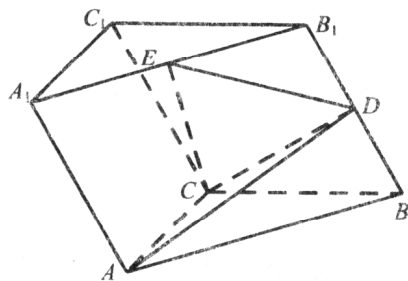
(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{1}{(2n-1)a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分) 如图三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB=2$, $AC \perp BC$, 侧面 AA_1C_1C 是矩形, 侧面 BB_1C_1C 是菱形, $\angle B_1BC = 60^\circ$, D 是棱 BB_1 的中点.

(I) 求证: $BB_1 \perp$ 平面 ACD ;

(II) 设 E 是 A_1B_1 的中点, 求二面角 $E-CD-A$ 的余弦值.



19. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x-b)e^x - \frac{a}{2}(x-b+1)^2$ ($a > 0, b \in \mathbb{R}, e$ 为自然对数的底数).

(I) 当 $b = 2$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 求证: $e^{a-1} \geq b$.

20. (12 分) 为加强防疫宣传, 某学校举行防疫知识问答竞赛, 竞赛共有两类题, 第一类是 5 个中等难度题, 每答对一个得 10 分, 答错得 0 分, 第二类是数量较多、难度相当的难题, 每答对一个得 20 分, 答错一个扣 5 分. 每位参加竞赛的同学从这两类题中共抽出 4 个回答 (每个题抽后不放回), 要求第二类题中至少抽 2 个. 学生小明第一类 5 题中有 4 个能答对, 第二类题中答对每个

问题的概率都是 $\frac{3}{4}$.

(I) 若小明选择从第一类题中抽两个题, 求这次竞赛中, 小明共答对 3 个题的概率;

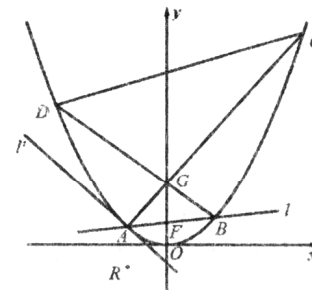
(II) 若小明第一个题是从第一类题中抽出并回答正确, 根据得分期望给他建议, 后面三个题应该选择从第二类题中抽多少个题回答?

21. (12 分) 已知抛物线 $E: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 k ($k \neq 0$) 的动直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 直线 l' 过点 $A(x_1, y_1)$, 且点 F 关于直线 l' 的对称点为 $R(x_1, -1)$.

(I) 求抛物线 E 的方程, 并证明直线 l' 是抛物线 E 的切线;

(II) 过点 A 且垂直于 l' 的直线交 y 轴于点 G , AG, BG 与抛物线 E 的另一个交点分别为 C, D , 记 $\triangle AGB$ 的面积为 S_1 ,

$\triangle CGD$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的取值范围.



(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 已知曲线

C 的参数方程为: $\begin{cases} x = \sin \alpha + 2 \cos \alpha \\ y = \cos \alpha - 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 直线 l 的极坐标方程为: $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

(I) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II) 设 A, B 是曲线 C 与直线 l 的公共点, 点 P 的坐标为 $(2, 0)$, 求 $||PA| - |PB||$ 的值.

23. (10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $f(x) = |x-1| + |ax+2|$ ($a > 0$).

(I) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) > 3$ 的解集;

(II) 若不等式 $f(x) \geq \frac{5}{2}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.