江西省八所重点中学2021届高三联考理科数学答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	D	A	B	A	D	C	B	A	D

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．72　　14．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　15．③⑤　　16．$2\sqrt{2}+1$

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答,第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分

17.（本小题满分12分）

（1）函数$f(x)=m\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$同时满足的条件为①③　　………2分

由题意可知条件①②互相矛盾，故③为函数$f(x)=m\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$满足的条件之一.由③可知，$T=2\pi$，所以$\omega=1$，与②中$\omega=2$矛盾，所以函数$f(x)=m\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$同时满足的条件①③.又由①可知$m=2$，

所以$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.　　………5分

（2）由（1）$a=2\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=2,$

由正弦定理得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3},$

则$b=\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin B, c=\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin C$,设$\Delta ABC$周长为L,

$L=a+b+c=2+\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin B+\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin C$　　………8分

$=2+\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin B+\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{3})=4\sin(B+\frac{\pi}{6})+2$

由$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$　　………10分

所以ΔABC周长范围为（$2\sqrt{3}+2,6$]　　………12分

18.（本小题满分12分）

（1）　证明：$\because |DE|^2+|CD|^2=2+2=4=|CE|^2\ \therefore CD\perp DE$

又$\because PC\perp$平面ABC,且$DE\subset$平面ABC,$\therefore PC\perp DE$,

又$\because PC$交CD于点C,$\therefore DE\perp$平面PCD,$DE\subset$平面PDE,

$\therefore$平面$PDE\perp$平面PCD　　………4分

（2）　以点C为坐标原点CA为x轴，CB为y轴，CP为z轴建立空间直角坐标系，

过点D做AC的平行线交CE于点H，$\therefore H$为CE中点，由三角形相似可得$|AC|=\frac{3}{2}$，

$\therefore A(\frac{3}{2},0,0), D(1,1,0), P(0,0,2)\therefore \overrightarrow{AD}=(-\frac{1}{2},1,0),\overrightarrow{AP}=(-\frac{3}{2},0,2)$　　………6分

设平面PAD的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)\therefore -\frac{1}{2}x+y=0,\ \therefore -\frac{3}{2}x+2z=0,$,解得$\vec{n}=\left(2,1,\frac{3}{2}\right)$

又$\because DE\perp$平面PCD $\therefore$平面PCD的法向量与$\overrightarrow{DE}$共线

$\therefore$平面PCD的法向量为$\overrightarrow{DE}=(-1,1,0)$，　　………8分

$\therefore \cos<\vec{n},\overrightarrow{DE}>=\frac{-1}{\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{58}}{29}$　　………11分

$\therefore$锐二面角$A-PD-C$的余弦值为$\frac{\sqrt{58}}{29}$.　　………12分

19.（本小题满分12分）

解：(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　……… 4分

(2) 由对称性可知,如果存在定点满足题设条件,则该定点必在x轴上

可设定点:$T(t,0)$, $\because BC$两点关于x轴对称,可设$B(x_0,y_0),C(-x_0,-y_0)$　$(x_0\neq\pm2)$

$\therefore l_{AB}:y(x_0+2)=y_0(x+2),\therefore P(0,\frac{2y_0}{x_0+2})$,同理可得$Q(0,\frac{-2y_0}{-x_0+2})$……… 6分

$\because$ 点 T 在以 PQ 为直径的圆上, $\therefore PT\perp QT$,代入可得:

$t^2+\frac{-4y_0^{\ 2}}{(x_0+2)(-x_0+2)}=t-\frac{4y_0^{\ 2}}{4-x_0^{\ 2}}=0$,又因为点 B、C 在椭圆上, $\therefore y_0=3-\frac{3x_0^{\ 2}}{4}$ ……… 10 分

代入 $t-\frac{4y_0^{\ 2}}{4-x_0^{\ 2}}=0$ 可得 $t^2=3$ $\therefore$ 圆过定点($\sqrt{3}$,0)或(- $\sqrt{3}$,0) ………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解:设 A，B，C，D 分别为第一，二，三，四个问题．用 M_i (i =1，2，3，4)表示甲同学第 i 个问题回答正确，用 N_i (i =1，2，3，4)表示甲同学第 i 个问题回答错误，则 M_i 与 N_i 是对立事件(i =1，2，3，4)．由题意得，$P(M_1)=\frac{3}{5}$，$P(M_2)=\frac{1}{2}$，$P(M_3)=\frac{1}{3}$，$P(M_4)=\frac{1}{4}$，

所以 $P(N_1)=\frac{2}{5}$，$P(N_2)=\frac{1}{2}$，$P(N_3)=\frac{2}{3}$，$P(N_4)=\frac{3}{4}$.

（1）记“甲同学能进入下一轮”为事件 Q，

$Q=M_1M_2M_3+N_1M_2M_3M_4+M_1N_2M_3M_4+M_1M_2N_3M_4+N_1M_2N_3M_4$， ……… 2 分

$P(Q)=P(M_1M_2M_3+N_1M_2M_3M_4+M_1N_2M_3M_4+M_1M_2N_3M_4+N_1M_2N_3M_4)$

$=P(M_1M_2M_3)+P(N_1M_2M_3M_4)+P(M_1N_2M_3M_4)+P(M_1M_2N_3M_4)+P(N_1M_2N_3M_4)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{40}$. ………6 分

（2）由题意，随机变量 ξ 的可能取值为 2，3，4.由于每题答题结果相互独立， ………7 分

所以 $P(\xi=2)=\frac{1}{5}$， ………8 分

$P(\xi=3)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{10}$， ………9 分

$P(\xi=4)=1-P(\xi=1)-P(\xi=2)=\frac{1}{2}$. ………10 分

随机变量 ξ 的分布列为

ξ	2	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

所以 $E(\xi)=2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{1}{2}=\frac{33}{10}$. ……… 12 分

21.（本小题满分 12 分）

(1) $f'(x)=1+\frac{a}{x}=\frac{x+a}{x}(x>0)$

当 $a\ge 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在R上单调递增，

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在（0, $-a$）单调递减，在（ $-a$,+∞）单调递增. ……… 3 分

（2）法一：

若 $x_0+\ln x_0<0$ 时，$\ln x_0<-x_0\Rightarrow x_0<e^{-x_0}\Rightarrow -e^{-x_0}+x_0<0$

所以 $-e^{-x_0}+x_0+\ \ x_0+\ln x_0<0$ 与 $-e^{-x_0}+2x_0+\ln x_0=0$ 矛盾；

若 $x_0+\ln x_0>0$ 时，$\ln x_0>-x_0\Rightarrow x_0>e^{-x_0}\Rightarrow -e^{-x_0}+x_0>0$

所以 $-e^{-x_0}+x_0+\ \ x_0+\ln x_0>0$ 与 $-e^{-x_0}+2x_0+\ln x_0=0$ 矛盾；

当 $x_0+\ln x_0=0$ 时，$\ln x_0=-x_0\Rightarrow x_0=e^{-x_0}\Rightarrow -e^{-x_0}+x_0=0$

得 $-e^{-x_0}+2x_0+\ln x_0=0$，故 $x_0+\ln x_0=0$ 成立，

法二: $\because e^{-x_0}=2x_0+\ln x_0$ $\therefore e^{-x_0}-x_0=x_0+\ln x_0$ $\therefore e^{-x_0}+\ln e^{-x_0}=x_0+\ln x_0$

$\because f(x)=x+\ln x$ 是增函数， $f\left(e^{-x_0}\right)=f\left(x_0\right)$，$\therefore e^{-x_0}=x_0$

即 $e^{-x_0}-x_0=x_0+\ln x_0=0$ ………7 分

（3）证明：要证 $x-x\ln x\le e^{-x}+x^2$，即证 $e^{-x}+x^2-x+x\ln x\ge 0$，

设 $h(x)=e^{-x}+x^2-x+x\ln x$，$x>0$.

$h'(x)=-e^{-x}+2x+\ln x$，令 $g(x)=h'(x)$

$g'(x)=e^{-x}+2+\frac{1}{x}>0$，所以函数 $h'(x)=-e^{-x}+2x+\ln x$ 单调递增，

又 $h'\left(\frac{1}{e}\right)=-e^{-\frac{1}{e}}+\frac{2}{e}-1<0$，$h'(1)=-\frac{1}{e}+2>0$，

故 $h'(x)=-e^{-x}+2x+\ln x$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上存在唯一零点 x_0，即 $-e^{-x_0}+2x_0+\ln x_0=0$． ········ 9 分

所以当 $x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0$， 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减，函数 $h(x)$ 在 $x\in(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)\ge h(x_0)=e^{-x_0}+{x_0}^2-x_0+x_0\ln x_0$， ········ 11 分

由 $-e^{-x_0}+2x_0+\ln x_0=0$，得

得 $h(x_0)=(x_0+1)(x_0+\ln x_0)=0$，所以 $h(x)\ge 0$，即 $f(x)\le e^{-x}+x^2$． ········12 分

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]

（1）由曲线 C 的参数方程得 $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{x}{3}\\ \sin\alpha=y\end{cases}$，

两式平方再相加可得曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$；

直线 l 的极坐标方程可化为 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=2,$

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$ ········4 分

（2）由（1）知：直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ （t 为参数 ），代入 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 整理得：

$3t^2+2\sqrt{3}t-5=0$，而 P（2，0），直线 l 与曲线 C 交于 M，N 两点，设 $PM=t_1$，$PN=t_2$，即有

$t_1+t_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3},t_1\cdot t_2=-\frac{5}{3}.$

所以 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{|PM|+|PN|}{|PM|\cdot|PN|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}$

$=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(-\frac{2\sqrt{3}}{3})^2-4\times(-\frac{5}{3})}}{\frac{5}{3}}=\frac{6\sqrt{2}}{5}$ ········10 分

23．[选修 4—5：不等式选讲]

可化为：$\begin{cases}x<-4\\ -x+2-x-4\le 8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-4\le x\le 2\\ -x+2+x+4\le 8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2\\ x-2+x+4\le 8\end{cases}$，

解得：$-5\le x<-4$ 或 $-4\le x\le 2$ 或 $2<x\le 3$，

所以，不等式的解集为 $[-5,3]$. ········5 分

（2）因为 $f(x)=|x-2|+|x+4|\ge|(x-2)-(x+4)|=6.$. ········6 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $t=6$，即 $2a+2b+c=6$，

由柯西不等式得：$(a^2+b^2+c^2)(2^2+2^2+1^2)\ge(2a+2b+c)^2=6^2=36.$，

当且仅当 $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=c,$，即 $a=b=\frac{4}{3},c=\frac{2}{3}$ 时，等号成立，

所以 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 4. ········10 分