

江西省八所重点中学 2021 届高三联考

理科数学试卷

2021. 4

考试时长: 120 分钟 分值: 150 分

命题: 吉安一中 罗爱军 王雪松 抚州一中 冯阳 杨国辉

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- 已知复数 $z = \frac{1}{1+\sqrt{3}i}$, 则下列说法正确的是 ()
 A. 复数 z 的实部为 $\frac{1}{2}$ B. 复数 z 的虚部为 $-\frac{\sqrt{3}}{4}i$
 C. 复数 z 的共轭复数为 $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ D. 复数 z 的模为 $\frac{1}{4}$
- 设集合 $A = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = \frac{2021}{2020} \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \mid y = 2^{|x|} \right\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 若 $a = 2021^{0.21}$, $b = \sin \frac{2021}{5} \pi$, $c = \log_{2021} 0.21$, 则 ()
 A. $c < a < b$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$
- 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 则事件 “ $y \geq x^{2020}$ ” 发生的概率为 ()
 A. $\frac{1}{2020}$ B. $\frac{1}{2021}$ C. $\frac{2019}{2020}$ D. $\frac{2020}{2021}$
- 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n = a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - 14$, 则 $S_n =$ ()
 A. $\frac{n^2}{4} + \frac{15n}{4}$ B. $\frac{n^2}{3} + \frac{15n}{3}$ C. $\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$ D. $n^2 + 3n$
- 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 满足 $f(6-x) = f(x)$, $(x-3)f'(x) > 0 (x \neq 3)$, 若 $f(0) \cdot f(1) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(5, 6)$ 内 ()
 A. 没有零点 B. 有且仅有 1 个零点
 C. 至少有 2 个零点 D. 可能有无数个零点
- 在 $\left(x + \frac{a}{x}\right)^n$ 的展开式中, 只有第六项的二项式系数最大, 且所有项的系数和为 0, 则含 x^6 的项系数为 ()
 A. 45 B. -45 C. 120 D. -120
- 已知点 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16-a^2} = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点, 点 M 是 C 右支上的一



点, 直线 MF_1 与 y 轴交于点 P , ΔMPF_2 的内切圆在边 PF_2 上的切点为 Q , 若 $|PQ| = 2\sqrt{3}$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B. 3 C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. 在 ΔABC 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若角 A, C, B 成等差数列, 角 C 的角平分线交 AB 于点 D , 且 $CD = \sqrt{3}$, $a = 3b$, 则 c 的值为 ()

- A. 3 B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

10. 十九世纪下半叶集合论的创立, 奠定了现代数学的基础. 著名的“康托三分集”是数学理性思维的构造产物, 具有典型的分形特征, 其操作过程如下: 将闭区间 $[0, 1]$ 均分为三段, 去掉中间的区间段 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 记为第一次操作; 再将剩下的两个区间 $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ 分别均分为三段, 并各自去掉中间的区间段, 记为第二次操作; ..., 如此这样, 每次在上一次操作的基础上, 将剩下的各个区间分别均分为三段, 同样各自去掉中间的区间段. 操作过程不断地进行下去, 以至无穷, 剩下的区间集合即是“康托三分集”. 若使去掉的各区间长度之和小于 $\frac{1818}{2021}$, 则操作的次数 n 的最大值为 ()

(参考数据: $(\frac{2}{3})^4 \approx 0.1975$, $(\frac{2}{3})^5 \approx 0.1317$, $(\frac{2}{3})^6 \approx 0.0878$, $(\frac{2}{3})^7 \approx 0.0585$)

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

11. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 64π , $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, $AB \perp AC$, $PA = 8$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 ()

- A. 8 B. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ D. 16

12. 已知函数 $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ($x \neq 0$), 则关于 x 的方程 $\sqrt{g(x)} + \frac{2}{\sqrt{g(x)}} - 2k = 0$ ($k \in \mathbb{R}$) 不可能有 () 个相异实根.

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 用 1, 2, 3, 4, 5 五个数字组成无重复数字的五位数, 其中偶数不在相邻数位上, 则满足条件的五位数共有 _____ 个. (用数字作答)

14. 曲线 $y = x^2 + x - \ln x$ 上任意一点 P 到直线 $2x - y - 2 = 0$ 的最短距离为 _____.

15. 给出下列命题:

①垂直于同一个平面的两个平面平行; ②“ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ”是“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为钝角”的充分不必要条件;

③边长为 2 的正方形的直观图的面积为 $\sqrt{2}$; ④函数 $f(x) = \frac{4}{\sin^2 x} + \sin^2 x$ 的最小值为 4;

⑤已知 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{1}{3}$, 则 $\tan \beta = 3$.

其中正确的有 _____ (填上你认为正确命题的序号)



16. 平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 满足 $|\overrightarrow{OA}| = 2|\overrightarrow{OB}| = 4$, $(2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 则对任意 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\left| \overrightarrow{OC} - \frac{1}{4} \cos \theta \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \overrightarrow{OB} \right|$ 的最大值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分

17. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = m \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($m > 0, \omega > 0$) 只能同时满足下列三个条件中的两个: ① 函数 $f(x)$ 的最大值为 2; ② 函数 $f(x)$ 的图像可由 $y = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像平移得到; ③ 函数 $f(x)$ 图像的相邻两条对称轴之间的距离为 π .

(1) 请写出这两个条件的序号, 并求出 $f(x)$ 的解析式;

(2) 锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , $A = \frac{\pi}{3}$, $a = f(A)$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

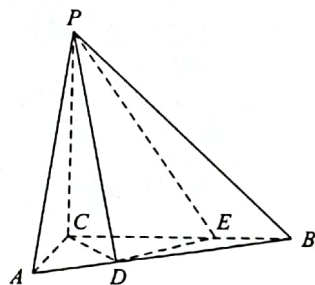
注: 如果选择多组条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

如图所示, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp$ 平面 ABC , $PC = 2$, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, D, E 分别为线段 AB, BC 上的点, 且 $CD = DE = \sqrt{2}$, $CE = 2EB = 2$.

(1) 证明: 平面 $PDE \perp$ 平面 PCD ;

(2) 求锐二面角 $A-PD-C$ 的余弦值.



(第 18 题图)

19. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 左焦点 $F(-1, 0)$, 点 $M(0, 2)$ 在椭圆 E 外部, 点 N 为椭圆 E 上一动点, 且 $\triangle NMF$ 的周长最大值为 $2\sqrt{5} + 4$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 点 B, C 为椭圆 E 上关于原点对称的两个点, A 为左顶点, 若直线 AB, AC 分别与 y 轴交于 P, Q 两点, 试判断以 PQ 为直径的圆是否过定点, 如果是请求出定点坐标, 如果不过定点, 请说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

4 月 30 日是全国交通安全反思日, 学校将举行交通安全知识竞赛, 第一轮选拔共设有 A, B, C, D 四个问题, 规则如下:

- ①每位参加者计分器的初始分均为 10 分, 答对问题 A, B, C, D 分别加 1 分, 2 分, 3 分, 6 分, 答错任一题减 2 分;
- ②每回答一题, 计分器显示累计分数, 当累计分数小于 8 分时, 答题结束, 淘汰出局; 当累计分数大于或等于 14 分时, 答题结束, 进入下一轮; 当答完四题, 若累计分数仍不足 14 分时, 答题结束, 淘汰出局, 若累计分数大于或等于 14 分时, 答题结束, 进入下一轮;
- ③每位参加者按问题 A, B, C, D 顺序作答, 直至答题结束. 假设甲同学对问题 A, B, C, D 回答正确的概率依次为 $\frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1) 求甲同学能进入下一轮的概率;

(2) 用 ξ 表示甲同学本轮答题结束时答题的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x + a \ln x, g(x) = e^{-x} - \ln x - 2x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $g(x_0) = 0$, 求 $x_0 + \ln x_0$ 的值;

(3) 证明: $x - x \ln x \leq e^{-x} + x^2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 设 $P(2, 0)$, 求 $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|}$ 的值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x - 2| + |x + 4|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 8$ 的解集;

(2) 若 a, b, c 为正实数, 函数 $f(x)$ 的最小值为 t , 且满足 $2a + 2b + c = t$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值.

