

2022 届高三年级江西智学联盟体第一次联考 理科数学

试卷满分：150 分 考试时长：120 分钟

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid \ln x < 1\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{2-x}\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(0, e)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(0, 2]$ D. $(-\infty, e)$
2. 复数 $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = \cos 2x - i \sin 2x$, 则 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| =$
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 白马寨是丰城市闻名遐迩的江西省历史文化名村，始建于南宋咸淳九年（即公元 1273 年），是有名的江南望族。村子建筑布局讲究风水，全村六十四条巷道依据八卦图的演变程序而精心设计，没有一条直巷，隐含八卦图中六十四卦象，又为“聚财”之意。白马寨至今完好地保存着 125 幢明清古建筑，成为吸引四方游客的一个旅游景区。我校高一年级周末准备用系统抽样的方法从 1200 名学生中抽取 40 人前往景区开展研学活动，现将 1200 名学生随机地从 1~1200 编号，按编号顺序平均分成 40 组（1~30 号，31~60 号，…，1171~1200 号），若第 4 组与第 6 组抽出的号码之和为 274，则第 10 组抽到的号码是
A. 272 B. 274 C. 287 D. 296
4. 已知函数 $f(x-1)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，且在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，若 $a = f(e^{\sqrt{e}})$, $b = f(\ln \pi)$, $c = f(\sin 4)$, 则 a, b, c 的大小关系为
A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$
5. 牛顿冷却定律描述一个物体在常温环境下的温度变化：如果物体的初始温度为 T_0 ，则经过一定时间 t 后的温度 T 将满足 $T - T_a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}} (T_0 - T_a)$ ，其中 T_a 是环境温度， h 称为半衰期。现有一杯 85°C 的热茶，放置在 25°C 的房间中，如果热茶降温到 55°C ，需要 10 分钟，则欲降温到 35°C ，大约需要（ ）分钟。（参考数据 $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$ ）
A. 16 分钟 B. 20 分钟 C. 24 分钟 D. 26 分钟

6. 函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，关于 $f(x)$ 有以下

说法：

- ① $f(x)$ 的单调递减区间是 $[4k-1, 4k+3], k \in \mathbf{Z}$;
- ② $f\left(\frac{13}{3}\right) = -\sqrt{3}$;
- ③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称;
- ④ $f(x)$ 的图象向右平移 $4k+1$ ($k \in \mathbf{N}$) 个单位长度后得到的图像对应的函数为偶函数. 其中所有正确的说法个数为

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 已知 a 是 $7^n + C_n^1 7^{n-1} + C_n^2 7^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} 7$ (n 为正奇数) 被 9 除的余数，则 $\int_1^e \left(x + \frac{a}{x}\right) dx$

的值为

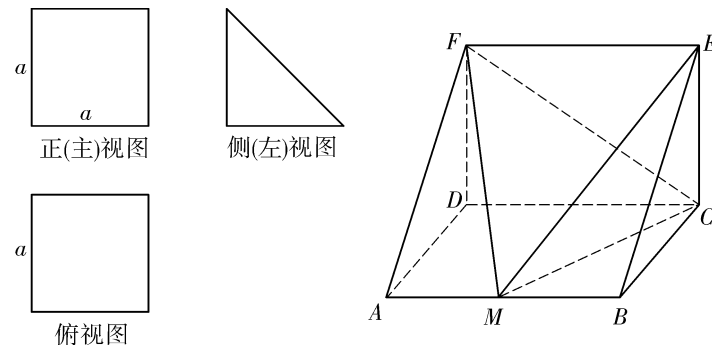
A. $\frac{e^2+13}{2}$ B. $\frac{e^2-13}{2}$ C. $\frac{e^2+5}{2}$ D. $\frac{e^2-5}{2}$

8. 若随机变量 $\xi \sim N(2, 2021^2)$ ，且 $P(\xi \leq 1) = P(\xi \geq a)$ 。点 M 在椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 上， C_1 的

左焦点为 F , Q 为曲线 $C_2: x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x + 20y + 107 = 0$ 上的动点，则 $|MQ| - |MF|$ 的最小值为

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

9. 一个多面体的三视图和直观图如图所示， M 是 AB 的中点，一只小蜜蜂在几何体 $ADF-BCE$ 的外接球内自由飞翔，则它飞入四面体 $FMCE$ 内的概率为



A. $\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{27\pi}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{9\pi}$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-2, -6)$, $N(6, 0)$ ，动点 M 满足 $|MN| = 2|MO|$ ，则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN}$ 的取值范围是

A. $[1, 81]$ B. $[-24, 56]$ C. $[-24, 81]$ D. $[1, 56]$

11. 已知 E, F, O 分别是正方形 $ABCD$ 边 BC, AD 及对角线 AC 的中点, 将三角形 ACD 沿着 AC 进行翻折构成三棱锥, 则在翻折过程中, 直线 EF 与平面 BOD 所成角的余弦值的取值范围为

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

12. 已知命题 $p: f(x) = \ln x - x^2 + ax$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减; 命题 $q: x \geq e$ 时, $3x^4 \ln x \geq (a-x)e^{\frac{a}{x}-1}$ 恒成立, 若 $\neg p \wedge q$ 为真命题, 则实数 a 的取值范围是

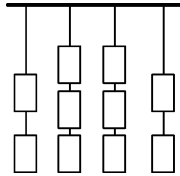
A. $(1, 3e]$ B. $[1, 3e]$ C. $[1, 4e]$ D. $(1, 4e]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分。

13. 已知 $P(-1, 3)$ 为角 α 终边上的一点, 则 $\frac{\sin \alpha - 2\cos \alpha}{3\sin \alpha + \cos \alpha} =$ _____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 3, S_{10} = 12$, 则 $S_{20} =$ _____.

15. 某公司在元宵节组织了一次猜灯谜活动, 主持人事先将 10 条不同灯谜分别装在了如图所示的 10 个灯笼中, 猜灯谜的职员每次只能任选每列最下面的一个灯笼中的谜语来猜 (无论猜中与否, 选中的灯笼就拿掉), 则这 10 条灯谜依次被选中的所有不同顺序方法数为 _____. (用数字作答)



16. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上、下焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交双曲线上支于 A, B 两点, 且满足 $\overrightarrow{BF_1} = 4\overrightarrow{F_1A}$, $|AF_2| = |AB|$, 则双曲线的离心率为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分) 已知向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3} \sin x, \cos x)$, $\mathbf{b} = (\cos x, -\cos x)$, 令 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2}$.

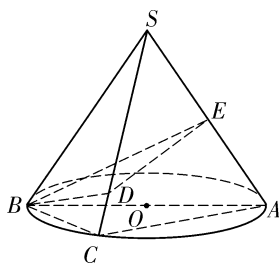
(1) 若方程 $f(x) = -\frac{3}{5}$ 在 $(0, \pi)$ 上的解为 x_1, x_2 , 求 $\sin(x_1 + x_2)$ 的值;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b = 3, f(A) = \frac{1}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

18. (12 分) 如图, 已知 AB 为圆锥 SO 底面的直径, 点 C 在圆锥底面的圆周上, $SB = AB = 2$,

$\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, BE 平分 $\angle SBA$, D 是 SC 上一点, 且平面 $DBE \perp$ 平面 SAB .

- (1) 求证: $SA \perp BD$;
(2) 求二面角 $E-BD-C$ 的平面角的余弦值.



19. (12 分) 某工厂的质检部门对拟购买的一批原料进行抽样检验, 以判定是接收还是拒收这批原料. 现有如下两种抽样检验方案:

方案一: 随机抽取一个容量为 12 的样本, 并全部检验, 若样本中不合格品数不超过 1 个, 则认为该批原料合格, 予以接收.

方案二: 先随机抽取一个容量为 6 的样本, 全部检验, 若都合格, 则予以接收, 若样本中不合格品数超过 1 个, 则拒收; 若样本中不合格品数为 1 个, 则再抽取一个容量为 6 的样本, 并全部检验, 且只有第二批抽样全部合格, 才予以接收.

假设拟购进的这批原料, 合格率为 $p (0 < p < 1)$, 并用 p 作为原料中每件产品是合格品的概率, 若每件产品所需的检验费用为 10 元, 且费用由工厂承担.

- (1) 若 $p = \frac{2}{3}$, 问用第二种检验方案平均所需的检验费用比第一种可节省多少元 (精确到 0.01)?
(2) 分别计算两种方案中, 这批原料通过检验的概率. 如果你是原料供应商, 你希望该工厂的质检部门采取哪种抽样检验方案, 并说明理由.

20. (12 分) 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作倾斜角为 θ ($\theta \neq \frac{\pi}{2}$) 的直线, 交抛物线于 A, B

两点, 当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 以 FA 为直径的圆与 y 轴相切于点 $T(0, \sqrt{3})$,

(1) 求抛物线的方程;

(2) 试问在 x 轴上是否存在异于 F 点的定点 P , 使得 $|FA| \cdot |PB| = |FB| \cdot |PA|$ 成立? 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = ae^{2x} - 2(ax+1)e^x$, $g(x) = x^2 + 2x$.

(1) 当 $a < 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a \leq 2$ 时, 证明: 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像上恰有两对关于 x 轴对称的点. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$)

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. 【选修 4—4: 坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 6\sin \theta + 8\cos \theta$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程与直线 l 的普通方程;

(2) 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 点 $P(4, -3)$, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$.

23. 【选修 4—5: 不等式选讲】(10 分)

设函数 $f(x) = |2x - m| + |2x + 2|$.

(1) 当 $m = -1$ 时, 求不等式 $f(x) > 9$ 的解集;

(2) 若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) < |2m - 3|$, 求 m 的取值范围.