

2022 届高三年级江西智学联盟体第一次联考 理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	D	C	A	B	D	B	A	D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. $\frac{5}{8}$ 14. 120 15. 25200 16. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. 解：(1)由已知， $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ， 1 分

由 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ， 2 分

可得 $f(x)$ 对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ 。 3 分

又 $f(x) = -\frac{3}{5} < -\frac{1}{2}$ ，且 $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ ， $\therefore x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{3}$ ， 4 分

$\therefore \sin(x_1 + x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。 5 分

(2)由 $f(A) = \frac{1}{2}$ ，可得 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ，又 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\therefore A = \frac{\pi}{6}$ 。 6 分

由正弦定理及 $b = 3$ ， $\therefore a = \frac{3}{2\sin B}, c = \frac{3\sin C}{\sin B}, B + C = \frac{5\pi}{6}$ ， 7 分

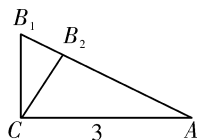
$\therefore a + c = \frac{3}{2\sin B} + \frac{3\sin\left(\frac{5\pi}{6} - B\right)}{\sin B} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\cos B + 1}{\sin B} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2\tan \frac{B}{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， 9 分

又 $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形， $\therefore \frac{\pi}{3} < B < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \frac{\pi}{6} < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{4}$ ， 10 分

$\therefore \frac{3}{2} < \frac{3}{2\tan \frac{B}{2}} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1) < a + c < 3\sqrt{3}$ ，

故所求三角形周长的取值范围为 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}, 3\sqrt{3} + 3\right)$ 。 12 分

(2)另解:如下图,过点 C 作 $CB_2 \perp AB_2$,垂足为 B_2 ,



此时周长的值最小,为 $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}$, 8 分

过点 C 作 $CB_1 \perp AC$,交 $\angle A$ 另一边于点 B_1 ,

此时周长的值最大,为 $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3 = 3\sqrt{3} + 3$ 11 分

$\therefore$ 三角形周长的取值范围为 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}, 3\sqrt{3} + 3\right)$ 12 分

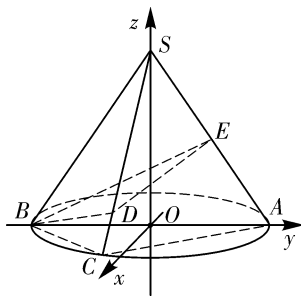
18. 解:(1)证明:因为 $\triangle SAB$ 是等边三角形, BE 平分 $\angle SBA$, $\therefore SA \perp BE$ 1 分

又因为平面 $DBE \perp$ 平面 SAB ,且交线为 BE ,所以 $SA \perp$ 平面 BDE , 3 分

而 $BD \subset$ 平面 BDE ,所以 $SA \perp BD$ 5 分

(2)解:如图所示,建立空间直角坐标系,则相关点的坐标为:

$S(0,0,\sqrt{3}), A(0,1,0), B(0,-1,0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, 7 分



由(1), $SA \perp$ 平面 BDE ,

所以 $\overrightarrow{SA} = (0,1,-\sqrt{3})$ 为平面 BDE 的一个法向量, 8 分

设平面 SBC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x,y,z)$,

而 $\overrightarrow{SB} = (0,-1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, 9 分

由 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{SB} = 0, \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$,取 $z = 1$,可以解得 $\mathbf{n} = (1,-\sqrt{3},1)$,

设两个法向量所成的角为 θ ,

$\therefore \cos \theta = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$, 11 分

由图易知二面角 $E-BD-C$ 为钝二面角,

故所求二面角的平面角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$ 12 分

19. 解:(1)第一种检验方案的检验费用为 $12 \times 10 = 120$ 元, 1 分

设方案二中所需的检验费用为随机变量 X ,则 X 的可能取值为 60,120. 2 分

$$P(X=120) = C_6^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{64}{243}, P(X=60) = 1 - \frac{64}{243} = \frac{179}{243},$$

故 X 的分布列为

X	60	120
P	$\frac{179}{243}$	$\frac{64}{243}$

..... 4 分

第二种检验方案的平均检验费用为 $EX = \frac{179}{243} \times 60 + \frac{64}{243} \times 120 = \frac{18420}{243} \approx 75.802$

因此用第二种检验方案平均所需的检验费用可节省 $120 - 75.802 \approx 44.20$ 元. 6 分

(2) 方案一通过检验的概率为 $P_1 = p^{12} + C_{12}^1(1-p)p^{11} = p^{11}(12-11p)$, 7 分

方案二通过检验的概率为

$P_2 = p^6 + C_6^1(1-p)p^5 \cdot p^6 = p^6[1+6p^5(1-p)]$, 8 分

$P_1 - P_2 = p^6[p^5(12-11p) - 1 - 6p^5(1-p)]$, 其中 $0 < p < 1$ 9 分

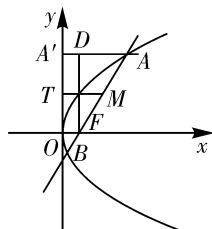
令 $f(p) = p^5(12-11p) - 1 - 6p^5(1-p) = -5p^6 + 6p^5 - 1$, 其中 $0 < p < 1$.

$f'(p) = -30p^5 + 30p^4 = -30p^4(p-1) > 0$, 故 $f(p)$ 在 $p \in (0, 1)$ 上单调递增, 10 分

$\therefore f(p) < f(1) = 0$, 即 $P_1 < P_2$,

故原料供应商希望该工厂的质检部门采取第二种抽样检验方案, 因为原料通过检验的概率更大. 12 分

20. 解: (1) 由已知, A 在第一象限, 设 AF 中点为 M , 则 T 为 M 在 y 轴上的射影, 过 A 作 y 轴的垂线, 垂足为 A' , 过 F 作 AA' 的垂线, 垂足为 D , 如图所示,



由已知, $\angle FAD = \frac{\pi}{3}$, $|FD| = 2\sqrt{3}$, 所以 $|AF| = 4$, $|AD| = 2$, 2 分

根据抛物线定义, 有 $|AF| = |AA'| + \frac{p}{2}$, 即 $4 = \frac{p}{2} + 2 + \frac{p}{2}$, 解得 $p = 2$ 3 分

故所求抛物线方程为 $y^2 = 4x$ 4 分

(2) 假设存在定点 $P(t, 0)$, 使 $|FA| \cdot |PB| = |FB| \cdot |PA|$ 成立, 即 $\frac{|FA|}{|FB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$ 成立,

根据三角形角平分线性质, 易知, PF 应为 $\angle APB$ 的平分线,

由对称性, 应有 $k_{PA} + k_{PB} = 0$ 成立, 6 分

因为 AB 过焦点 $F(1, 0)$, 故可设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$, $m \neq 0$,

且 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 显然 $\Delta > 0$, $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 \cdot y_2 = -4$, 8 分

$$\begin{aligned}\therefore k_{PA} + k_{PB} &= \frac{y_1}{x_1 - t} + \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1(x_2 - t) + y_2(x_1 - t)}{(x_1 - t)(x_2 - t)} = \frac{y_1\left(\frac{y_2^2}{4} - t\right) + y_2\left(\frac{y_1^2}{4} - t\right)}{x_1x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2} \\ &= \frac{\frac{y_1y_2^2}{4} - y_1t + \frac{y_2y_1^2}{4} - y_2t}{x_1x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2} = \frac{\frac{y_1y_2}{4}(y_1 + y_2) - t(y_1 + y_2)}{x_1x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}\end{aligned}$$

由 $k_{PA} + k_{PB} = 0$, 可得 $\frac{y_1y_2}{4}(y_1 + y_2) - t(y_1 + y_2) = 0$, 即 $y_1 + y_2 = 0$ 或 $\frac{y_1y_2}{4} = t$,
而 $m \neq 0$, $\therefore y_1 + y_2 = 0$ 不成立. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}

$\therefore$ 由 $\frac{y_1y_2}{4} = t$ 可得 $t = -1$,
即存在定点 $P(-1, 0)$ 满足条件. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

21. 解: (1) $f'(x) = 2ae^{2x} - 2ae^x - 2(ax + 1)e^x = 2e^x(ae^x - a - ax - 1)$ \dots\dots\dots 1 \text{ 分}

令 $h(x) = ae^x - a - ax - 1$, $h'(x) = ae^x - a = a(e^x - 1)$, 由 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 0$, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}

当 $a < 0$ 时, $x \in (-\infty, 0)$, $h'(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$, $h'(x) < 0$, $\therefore h(x) \leq h(0) = -1 < 0$,
\dots\dots\dots 3 \text{ 分}

$\therefore a < 0$ 时恒有 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

(2) 令 $F(x) = f(x) + g(x)$, 问题转化为证明 $F(x) = 0$ 恰有两个零点, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

$$F'(x) = 2(ae^x - 1)(e^x - x - 1), \therefore 0 < a < 2 \text{ 令 } F'(x) = 0 \text{ 解得: } x = \ln \frac{1}{a}$$

所以当 $x \in \left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增;

$$\text{所以 } F(x)_{\min} = F\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln^2 \frac{1}{a} - \frac{1}{a}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{a} \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right), \text{不妨记 } G(t) = F\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln^2 t - t \quad \text{则 } G'(t) = \frac{2\ln t - t}{t},$$

$$\text{记 } \varphi(t) = 2\ln t - t, \text{则 } \varphi'(t) = \frac{2}{t} - 1,$$

所以当 $t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 单调递增;

当 $t \in (2, +\infty)$ 时, $\varphi'(t) < 0$, $\varphi(t)$ 单调递减;

$$\text{则 } \varphi(t) \leq \varphi(2) = 2\ln 2 - 2 < 0, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

所以 $G'(t) = \frac{2\ln t - t}{t} < 0$, 因此 $G(t)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

$$G(t) = F\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln^2 t - t \leq \ln^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \ln^2 2 - \frac{1}{2} < 0. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

① 当 $x < \ln \frac{1}{a}$ 时, $F(x) = ae^{2x} - 2(ax + 1)e^x + x^2 + 2x$,

一方面, 令 $x < -2$, 则 $x^2 + 2x > 0$,

另一方面,令 $ae^{2x} - 2(ax+1)e^x > 0$, 即 $e^x - 2(x + \frac{1}{a}) > 0$,

而 $e^x - 2(x + \frac{1}{a}) > x + 1 - 2(x + \frac{1}{a})$, 令 $x + 1 - 2(x + \frac{1}{a}) > 0$, 解得 $x < 1 - \frac{2}{a}$,

取 $x_0 = \min\{1 - \frac{2}{a}, -\ln a, -2\} = \min\{1 - \frac{2}{a}, -2\}$, 当 $x < x_0$ 时, $F(x) > 0$,

$\therefore F(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 有且仅有一个零点. 10 分

② 当 $x > \ln \frac{1}{a}$ 时, $F(x) = ae^{2x} - 2(ax+1)e^x + x^2 + 2x$,

一方面, 令 $x > 0$, 则 $x^2 + 2x > 0$,

另一方面, 令 $ae^{2x} - 2(ax+1)e^x > 0$, 即 $e^x - 2(x + \frac{1}{a}) > 0$,

$\because e^x \geq ex \quad \therefore e^x - 2(x + \frac{1}{a}) \geq (e-2)x - \frac{2}{a}$, 令 $(e-2)x - \frac{2}{a} > 0$, 解得 $x > \frac{2}{a(e-2)}$,

取 $x_0 = \max\{\frac{2}{a(e-2)}, -\ln a, 0\} = \max\{\frac{2}{a(e-2)}, -\ln a\}$, 当 $x > x_0$ 时, $F(x) > 0$,

$\therefore F(x)$ 在区间 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 有且仅有一个零点. 11 分

综上所述: $0 < a \leq 2$ 时, $F(x)$ 有且仅有两个零点, 即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像上恰有两对关于 x 轴对称的点. 12 分

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 解: (1) 由 $\rho = 6\sin \theta + 8\cos \theta$, 得 $x^2 + y^2 = 6y + 8x$, 即 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

即曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$,

由直线 l 的参数方程消去参数 t , 可得普通方程为 $4x + 3y - 7 = 0$ 4 分

(2) 易知点 $P(4, -3)$ 在直线 l 上, 则直线 l 的参数方程可化为 $\begin{cases} x = 4 + \frac{3}{5}t' \\ y = -3 + \frac{4}{5}t' \end{cases}$ (t' 为参数),
..... 6 分

将其代入曲线 C 的直角坐标方程可得: $\frac{9t'^2}{25} + (\frac{4}{5}t' - 6)^2 = 25$, 即 $t'^2 - \frac{48}{5}t' + 11 = 0$,

所以 $t'_1 + t'_2 = \frac{48}{5}$, $t'_1 t'_2 = 11$, 8 分

由于 $P(4, -3)$ 在圆 C 外,

所以 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t'_1|} + \frac{1}{|t'_2|} = \frac{|t'_1| + |t'_2|}{|t'_1 t'_2|} = \frac{|t'_1 + t'_2|}{|t'_1 t'_2|} = \frac{48}{55}$ 10 分

23. 解: (1) 当 $m = -1$ 时, $f(x) = |2x+1| + |2x+2| = \begin{cases} 4x+3, & x > -\frac{1}{2} \\ 1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ -4x-3, & x < -1 \end{cases}$

当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, 由 $f(x) > 9$ 得 $x > \frac{3}{2}$, 故 $x > \frac{3}{2}$;

当 $x < -1$ 时, 由 $f(x) > 9$ 得 $x < -3$, 故 $x < -3$;

即不等式 $f(x) > 9$ 的解集为: $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; 4 分

$$(2) f(x) = |2x - m| + |2x + 2| \geqslant |(2x + 2) - (2x - m)| = |m + 2|,$$

$$\therefore |m + 2| < |2m - 3|, \text{ 则 } m^2 + 4m + 4 < 4m^2 - 12m + 9,$$

解得 $m > 5$ 或 $m < \frac{1}{3}$, 故 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (5, +\infty)$ 10 分