

苏北联考数学

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号等信息用黑色墨水签字笔填写在答题卡的相应位置.

一、选择题. 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{x | \sqrt{x-1} < 2\}$, $N = \left\{x \middle| \frac{2}{x} > 1\right\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | x < 2\}$ B. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 5\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

【答案】B

2. 若复数 z 满足 $z(3+4i) = 5i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 5 D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

3. 已知 $a = \sin 2$, $b = \log_2 \sin 2$, $c = 2^{\sin 2}$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

【答案】B

4. 甲、乙、丙、丁、戊 5 名党员参加“党史知识竞赛”, 决出第一名到第五名的名次(无并列名次), 已知甲排第三, 乙不是第一, 丙不是第五. 据此推测 5 人的名次排列情况共有() 种

- A. 5 B. 8 C. 14 D. 21

【答案】C

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 且 $f(-1) = 1$, 则不等式

$f(\lg x) - f\left(\lg \frac{1}{x}\right) > 2$ 的解集为

- A. $(-\infty, 10)$ B. $(0, 10)$ C. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{10}\right)$

【答案】D

6. 今天是星期三, 经过 7 天后还是星期三, 那么经过 8^{2021} 天年后是

- A. 星期二 B. 星期三 C. 星期四 D. 星期五

【答案】C

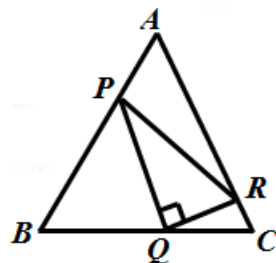
7. 将正整数12分解成两个正整数的乘积有 1×12 , 2×6 , 3×4 三种, 其中 3×4 是这三种分解中两数差的绝对值最小的, 我们称 3×4 为12的最佳分解. 当 $p \times q (p, q \in \mathbf{N}^*)$ 是正整数 n 的最佳分解时, 我们定义函数 $f(n) = |p - q|$, 例如 $f(12) = |4 - 3| = 1$, 则 $\sum_{i=1}^{2021} f(2^i) =$

A. $2^{1011} - 1$ B. 2^{1011} C. $2^{1011} - 1$ D. 2^{1010}

【答案】A

【解析】 $\sum_{i=1}^{2021} f(2^i) = \sum_{k=0}^{1010} 2^k = 2^{1011} - 1$.

8. 如图, 直角三角形 PQR 的三个顶点分别在等边三角形 ABC 的边 AB 、 BC 、 CA 上, 且 $PQ = 2\sqrt{3}$, $QR = 2$, $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$, 则 AB 长度的最大值为



- A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ B. 6 C. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

【答案】C

以 Q 为原点, QR, QP 分别为 x, y 轴,

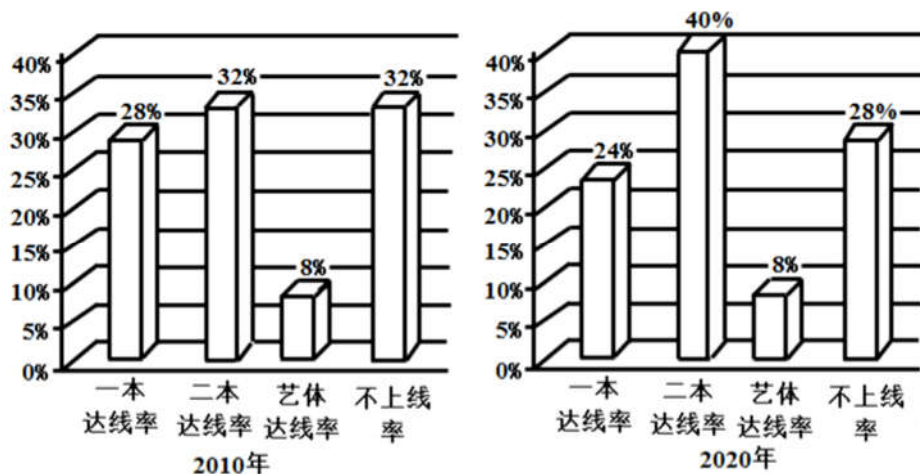
可知 B 在圆 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$ 上, C 在圆 $(x-1)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$,

设 $y = kx$, 联立可得 $B\left(\frac{2\sqrt{3}k-2}{k^2+1}, \frac{2\sqrt{3}k^2-2k}{k^2+1}\right)$, $C\left(\frac{6-2\sqrt{3}k}{3(k^2+1)}, \frac{6k-2\sqrt{3}k^2}{3(k^2+1)}\right)$,

则 $BC = 4\sqrt{\frac{(2k-\sqrt{3})^2}{k^2+1}} \leq \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 某高中2020年的高考考生人数是2010年高考考生人数的1.5倍, 为了更好地比较该校考生的升学情况, 统计了该校2010年和2020年的高考升学率, 得到如下柱状图:



则下列说法中正确的有

- A. 与2010年相比，2020年一本达线人数有所减少
- B. 2020年二本达线率是2010年二本达线率的1.25倍
- C. 2010年与2020年艺体达线人数相同
- D. 与2010年相比，2020年不上线的人数有所增加

【答案】BD

10. 已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的两个不同零点，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值是

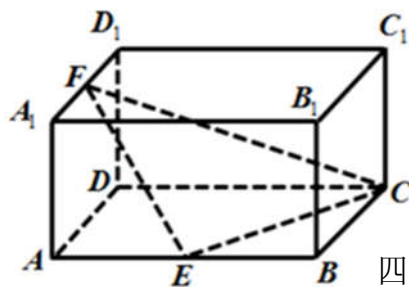
$\frac{\pi}{2}$ ，则下列说法中正确的有

- A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上是增函数
- B. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称
- C. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\pi, 0)$ 中心对称
- D. 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2, 1]$

【答案】ABD

11. 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 4$ ， $BC = BB_1 = 2$ ， E 、 F 分别为棱 AB 、 A_1D_1 的中点，则下列说法中正确的有

- A. $DB_1 \perp CE$
- B. 三棱锥 $D - CEF$ 的体积为 $\frac{8}{3}$
- C. 若 P 是棱 C_1D_1 上一点，且 $D_1P = 1$ ，则 E 、 C 、 P 、 F



四点

共面

D. 平面 CEF 截该长方体所得的截面为五边形

【答案】BCD

【解析】 $\overrightarrow{DB_1} = (2, 4, 2)$, $\overrightarrow{CE} = (2, -2, 0)$, $\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{CE} = 4 - 8 = -4 \neq 0$,

$\therefore DB_1 \not\perp CE$, A 错误;

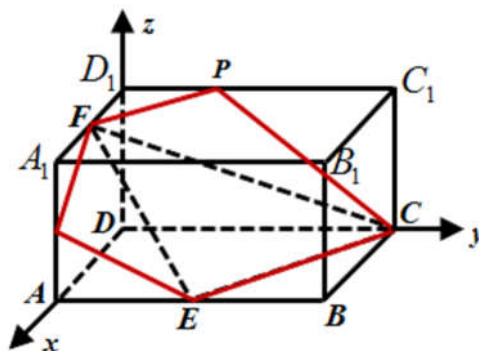
$V_{D-CEF} = V_{F-DEC} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{8}{3}$, B 项正确;

$\overrightarrow{FP} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{FE} = (1, 2, -2)$, $\overrightarrow{FC} = (-1, 4, -2)$,

有 $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FE}$, $\therefore E, C, P, F$ 共面, C 项正确;

D 项如图为五边形, D 项正确;

故选 BCD.



12. 17 世纪初, 约翰·纳皮尔为了简化计算而发明了对数. 对数的发明是数学史上的重大事件, 恩格斯曾经把笛卡尔的坐标系、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分共同称为 17 世纪的三大数学发明. 我们知道, 任何一个正实数 N 可以表示成 $N = a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10, n \in \mathbf{Z}$) 的形式, 两边取常用对数, 则有 $\lg N = n + \lg a$, 现给出部分常用对数值 (如下表), 则下列说法中正确的有

真数 x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg x$ (近似值)	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1.000
真数 x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\lg x$ (近似值)	1.041	1.079	1.114	1.146	1.176	1.204	1.230	1.255	1.279

A. 3^{10} 在区间 $(10^4, 10^5)$ 内

B. 2^{50} 是 15 位数

C. 若 $2^{-50} = a \times 10^m$ ($1 \leq a < 10, m \in \mathbf{Z}$), 则 $m = -16$

D. 若 m^{32} ($m \in \mathbf{N}^*$) 是一个 35 位正整数, 则 $m = 12$

【答案】ACD

【解析】法一:

$\lg 3^{10} = 10 \cdot 0.477 = 4.77$, $\lg 10^4 = 4$, $\lg 10^5 = 5$, A 项正确;

$\lg 2^{50} = 50 \cdot 0.301 = 15.05$ 含于 $(\lg 10^{15}, \lg 10^{16})$ 为 16 位数, B 项错误;

$\lg 2^{-50} = -50 \cdot 0.301 = -15.02$, $\lg(a \cdot 10^m) = m \lg a$, ($0 \leq \lg a < 1$) $\Rightarrow m = -16$, C 项正确;

$\lg m^{32} \in (\lg 10^{34}, \lg 10^{35}) \Rightarrow 1.0625 \leq \lg m < 1.09375 \Rightarrow m = 12$, D 项正确;

故选 ACD.

法二:

$$\lg 3^{10} = 10 \lg 3 = 4.77, \lg 10^4 = 4, \lg 10^5 = 5,$$

$$\therefore \lg 10^4 < \lg 3^{10} < \lg 10^5, \therefore 10^4 < 3^{10} < 10^5, \text{A 对};$$

$$\lg 2^{50} = 50 \lg 2 = 50 \times 0.301 = 15.05, 15 < \lg 2^{50} < 16,$$

$$10^{15} < 2^{50} < 10^{16}, \therefore 2^{50} \text{ 是 } 16 \text{ 位数, B 错};$$

$$2^{50} = x \cdot 10^{15}, x \in [1, 10),$$

$$2^{-50} = \frac{1}{x} \cdot 10^{-15} = \frac{10}{x} \cdot 10^{-16}, \therefore m = -16, \text{C 对};$$

$$10^{34} < m^{32} < 10^{35}, 34 < 32 \lg m < 35, \frac{34}{32} < \lg m < \frac{35}{32}$$

$$1.0625 < \lg m < 1.09375, \text{D 对},$$

故选 ACD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知两个单位向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

14. 已知 F 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 过 F 作与 x 轴垂直的直线交双曲线于 A, B 两点, 若以 AB 为直径的圆过坐标原点, 则该双曲线的离心率为_____.

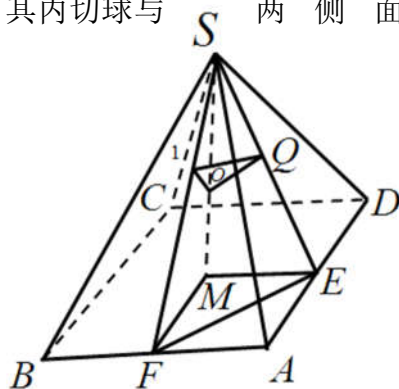
【答案】 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

15. 写出一个值域为 $[1, 2]$ 的周期函数 $f(x) =$ _____.

【答案】 $f(x) = |\sin x| + 1$ (答案不唯一)

16. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 2, 侧棱长为 $\sqrt{10}$, 其内切球与两侧面 SAB, SAD 分别切于点 P, Q , 则 PQ 的长度为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



【解析】设内切球半径为 r ，球心为 I ，

AB, AD 的中点分别为 E, F ， $SH \perp$ 平面 $ABCD$ ，

可得 $SH = 2\sqrt{2}$ ，则有 $\frac{1}{3}(4 \times 3 + 4)r = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 4$ ，得 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $SI = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，可得 $\frac{SI}{SE} = \frac{SP}{SH}$ ，所以 $SP = 2$ ，

又 $\frac{PQ}{EF} = \frac{SP}{SE} = \frac{2}{3}$ ， $EF = \sqrt{2}$ ，可得 $PQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ，其前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} = S_{n-1} = 2S_n + 2$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = a_n + 2^{a_n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解析】

(1) 由 $S_{n+1} + S_{n-1} = 2S_n + 2$ ，可得 $a_{n+1} - a_n = 2$ ，

又 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ，则可知 $a_n = 2n - 1$.

(2) 由(1)可知 $b_n = a_n + 2^{a_n} = 2n - 1 + 2^{2n-1}$ ，

则 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1 \times (1 + 2n - 1)}{2} + \frac{2 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = n^2 + \frac{2}{3}(4^n - 1)$.

18. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a < b < c$ ，现有三个条件：

① a, b, c 为连续自然数；② $c = 3a$ ；③ $C = 2A$.

(1) 从上述三个条件中选出两个，使得 $\triangle ABC$ 不存在，并说明理由（写出一组作答即可）；

(2) 从上述三个条件中选出两个，使得 $\triangle ABC$ 存在，并求 a 的值.

【解析】

(1) 选①和②，由 $a < b < c$ ，则有 $c = 3a = a + 2$ ，解得 $a = 1$ ，

所以 $\triangle ABC$ 三边长为1, 2, 3，这样的三角形不存在.

(2) 选①和③，则有 $b = a + 1$ ， $c = a + 2$ ，

由 $C = 2A$ ，则有 $\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = 2 \cos A = \frac{(a+1)^2 + (a+2)^2 - a^2}{(a+1)(a+2)} = \frac{a+2}{a}$ ，

整理得 $a^2 - 3a - 4 = 0$ ，解得 $a = 4$ ，

此时三角形的三边为 4, 5, 6, 这样的三角形存在, 符合题意,
所以 $a = 4$.

19. (12 分) 某观影平台为了解观众对最近上映的某部影片的评价情况 (评价结果仅有“好评”、“差评”), 从平台所有参与评价的观众中随机抽取 216 人进行调查, 部分数据如下表所示 (单位: 人):

	好评	差评	合计
男性		68	108
女性	60		
合计			216

(1) 请将 2×2 列联表补充完整, 并判断是否有 99% 的把握认为“对该部影片的评价与性别有关”?

(2) 若将频率视为概率, 从观影平台的所有给出“好评”的观众中随机抽取 3 人, 用随机变量 X 表示被抽到的男性观众的人数, 求 X 的分布列;

(3) 在抽出的 216 人中, 从给出“好评”的观众中利用分层抽样的方法抽取 10 人, 从给出“差评”的观众中抽取 $m(m \in \mathbf{N}^*)$ 人. 现从这 $(10 + m)$ 人中, 随机抽出 2 人, 用随机变量 Y 表示被抽到的给出“好评”的女性观众的人数. 若随机变量 Y 的数学期望不小于 1, 求 m 的最大值.

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据:

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【解析】

(1) 2×2 列联表如下:

	好评	差评	合计
男性	40	68	108
女性	60	48	108
合计	100	116	216

有
$$X^2 = \frac{216 \times (40 \times 48 - 60 \times 68)^2}{108 \times 108 \times 100 \times 116} = 7.44828,$$

又 $6.635 < 7.44828 < 7.879,$

所以有 99% 的把握认为“对该部影片的评价与性别有关”;

(2) $X = 0, 1, 2, 3$

$$\text{则有 } P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

$$P(X=1) = C_3^1 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$$

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

所以分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

(3) 好评：男 4，女 6；差评： m 人；

依题意可知 $Y = 0, 1, 2$

$$P(Y=0) = \frac{C_{4+m}^2}{C_{10+m}^2} = \frac{(4+m)(3+m)}{(10+m)(9+m)}$$

$$P(Y=1) = \frac{C_6^1 C_{4+m}^1}{C_{10+m}^2} = \frac{12(4+m)}{(10+m)(9+m)}$$

$$P(Y=2) = \frac{C_6^2}{C_{10+m}^2} = \frac{30}{(10+m)(9+m)}$$

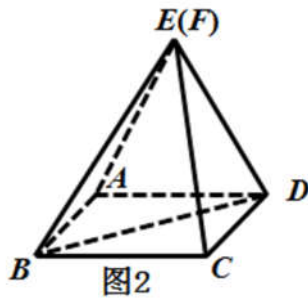
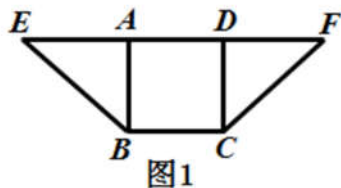
$$\text{则有 } E(Y) = \frac{12(4+m) + 60}{(10+m)(9+m)} \geq 1, \text{ 得 } (m-2)(m+9) \leq 0,$$

所以 m 最大值为 2.

20. (12 分) 图 1 是由正方形 $ABCD$, $\text{Rt}\triangle ABE$, $\text{Rt}\triangle CDF$ 组成的一个等腰梯形, 其中 $AB = 2$, 将 $\triangle ABE$ 、 $\triangle CDF$ 分别沿 AB, CD 折起使得 E 与 F 重合, 如图 2.

(1) 设平面 $ABE \cap$ 平面 $CDE = l$, 证明: $l \parallel CD$;

(2) 若二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 AE 长.



【解析】解析一：

(1) 证明：∵ $AB \parallel CD$ ， $CD \not\subseteq$ 平面 ABE ， $AB \subseteq$ 平面 ABE

∴ $CD \parallel$ 平面 ABE ，∵ 平面 $ABE \cap$ 平面 $CDE = l$

∴ $CD \parallel l$.

(2) 取 AD 中点 O ，连接 EO ，则 $EO \perp AD$.

∵ $AB \perp AD$ ， $AB \perp AE$ ， $AB \cap AE = A$ ，

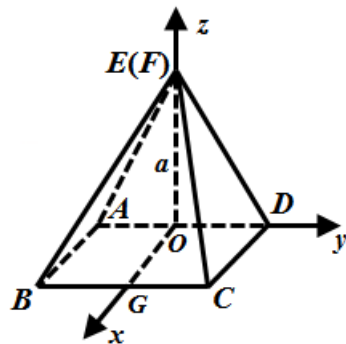
∴ $AB \perp$ 平面 ADE ，∵ $EO \subseteq$ 平面 ADE ，∴ $AB \perp EO$

∵ $AB \cap AD = A$ ，∴ $EO \perp$ 平面 $ABCD$.

取 BC 中点 G ，以 OG, OD, OE 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，

设 $OE = a (a > 0)$ ，则 $A(0, -1, 0)$ ， $B(2, -1, 0)$ ， $D(0, 1, 0)$ ， $E(0, 0, a)$

∴ $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{AE} = (0, 1, a)$



设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 ABE 的一个法向量，则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ y_1 + az_1 = 0 \end{cases}$

令 $z_1 = 1$ ，得 $\vec{n}_1 = (0, -a, 1)$.

同理可求平面 BED 的一个法向量 $\vec{n}_2 = (a, a, 1)$

由题知 $\left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \left| \frac{0 \cdot a + (-a) \cdot a + 1 \times 1}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{a^2 + a^2 + 1}} \right| = \left| \frac{1 - a^2}{\sqrt{a^2 + 1} \sqrt{2a^2 + 1}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$

∴ $3a^4 - 13a^2 + 4 = 0$ ，∴ $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 2

∴ $AE = \sqrt{1 + a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{5}$.

当 $AE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，二面角 $A-BE-D$ 的平面角为钝角，不符合题意，

$$\therefore AE = \sqrt{5}.$$

解析二：

(1) 因为 $CD \parallel AB$, $AB \subset$ 平面 ABE , $CD \not\subset$ 平面 CDE ,
 则可知 $CD \parallel$ 平面 ABE , 又 $CD \subset$ 平面 CDE , 平面 $ABE \cap$ 平面 $CDE = l$,
 所以 $l \parallel CD$.

(2) 取 AD 中点为 O , BC 中点为 G , 连结 EO , OG ,
 易证 $EO \perp$ 平面 $ABCD$, 设 $EO = t$,
 以 O 为原点, OG, OD, OE 分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,
 则有 $E(0, 0, t)$, $A(0, -1, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $D(0, 1, 0)$,

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 BDE 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{DE} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{DB} = 0 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} y_1 + tz_1 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} -y_2 + tz_2 = 0 \\ 2x_2 - 2y_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } \vec{n}_1 = (0, -t, 1), \vec{n}_2 = (t, t, 1),$$

$$\text{则有 } \left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|1 - t^2|}{\sqrt{(1 + t^2)(1 + 2t^2)}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{解得 } t^2 = 4 \text{ 或 } \frac{1}{3}$$

$$\text{当 } t^2 = 4, \text{ 有 } AE = \sqrt{1 + t^2} = \sqrt{5};$$

$$\text{当 } t^2 = \frac{1}{3}, \text{ 此时有二面角 } A - BE - D \text{ 为钝角, 不符合};$$

$$\text{所以 } AE = \sqrt{5}$$

$$21. (12 \text{ 分}) \text{ 已知函数 } f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(1) 若直线 $y = kx - 1$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求实数 k 的值;

(2) 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x}$ 成立, 求实数 a 的取值集合.

【解析】解析一：

$$(1) \text{ 设切点坐标为 } \left(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0} \right), f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

则 $f(x)$ 在 $\left(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right)$ 处的切线方程为: $y - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}(x - x_0)$

$$\text{整理有 } y = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}x + \frac{2 \ln x_0 - 1}{x_0}$$

$$\text{由题知 } \frac{2 \ln x_0 - 1}{x_0} = -1, \text{ 即 } 2 \ln x_0 + x_0 - 1 = 0$$

易知 $y = 2 \ln x + x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{因此 } x_0 = 1, \text{ 则 } k = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 1.$$

$$(2) \text{ 由题知 } f(x) \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x} \text{ 得 } \frac{\ln x}{x} \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x}, \text{ 即 } \ln ax \leq ax^2 - x$$

$$\text{令 } g(x) = \ln ax - ax^2 + x, \text{ 其中 } g\left(\frac{1}{a}\right) = 0,$$

又 $\because g(x) \leq 0$ 恒成立, 故 $\frac{1}{a}$ 为 $g(x)$ 的一个极大值点

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + 1, \quad g'\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - a = 0, \quad a = 1$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } g'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{(1 + 2x)(1 - x)}{x}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减

$g(x) \leq g(1) = 0$, 符合题意, 故 $a \in \{1\}$.

解析二:

$$(1) \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{设切点 } P\left(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = k \\ kx_0 - 1 = \frac{\ln x_0}{x_0} \end{cases}, \text{ 所以 } x_0 + 2 \ln x_0 - 1 = 0, \quad (*)$$

设 $g(x) = x + 2 \ln x - 1$, 显然 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上, 且 $g(1) = 0$,

所以方程(*)有唯一的实数根 $x_0 = 1$,

所以 $k=1$.

$$(2) f(x) \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x} \Leftrightarrow ax^2 - x - \ln a - \ln x \geq 0,$$

$$\text{记 } h(x) = ax^2 - x - \ln a - \ln x, (x > 0, a > 0), h'(x) = 2ax - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - x - 1}{x},$$

$$\text{记 } \varphi(x) = 2ax^2 - x - 1,$$

$$\text{函数的对称轴 } x = \frac{1}{4a} > 0, \varphi(0) < 0, \text{ 当 } x \rightarrow +\infty, \varphi(x) \rightarrow +\infty,$$

$$\text{所以存在唯一 } x_0 > 0, \text{ 使 } \varphi(x_0) = 0, \text{ 即 } 2ax_0^2 - x_0 - 1 = 0,$$

$$\text{所以 } a = \frac{x_0 + 1}{2x_0^2},$$

$$\text{当 } 0 < x < x_0 \text{ 时, } h'(x) < 0, \text{ 当 } x > x_0 \text{ 时, } h'(x) > 0,$$

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } (0, x_0) \square, (x_0, +\infty) \square,$$

$$\text{所以 } h(x)_{\min} = h(x_0) = ax_0^2 - x_0 - \ln ax_0 = \frac{x_0 + 1}{2} - x_0 - \ln \frac{x_0 + 1}{2x_0} = \frac{1 - x_0}{2} - \ln \frac{x_0 + 1}{2x_0} \geq 0,$$

$$\text{记 } m(x) = \frac{1-x}{2} - \ln(x+1) + \ln 2x (x > 0),$$

$$\text{则 } m'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{(x+2)(1-x)}{2x(x+1)},$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } m'(x) > 0, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } m'(x) < 0,$$

$$\text{所以 } m(x) \text{ 在 } (0, 1) \square, (1, +\infty) \square,$$

$$\text{所以 } m(x)_{\max} = m(1) = 0, \text{ 所以 } h(x_0) = 0, \text{ 且 } x_0 = 1,$$

$$\text{所以 } a = \frac{x_0 + 1}{2x_0^2} = 1,$$

故实数 a 的取值集合为 $\{1\}$.

解析三:

$$(1) \text{ 设切点为 } (x_0, y_0), \text{ 由 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ 则有 } k = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2},$$

$$\text{且 } f(x_0) - x_0 f'(x_0) = \frac{2 \ln x_0 - 1}{x_0} = -1, \text{ 解得 } x_0 = 1, \text{ 所以 } k = 1;$$

(2) 由 $\frac{\ln x}{x} \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x}$, 记 $t = ax$, 等价于 $t^2 - t - a \ln t \geq 0$,

记 $g(t) = t^2 - t - a \ln t$, 其中 $a > 0$, 有 $g'(t) = \frac{2t^2 - t - a}{t}$,

易知 $g'(t) = 0$ 有一个正根, 记为 t_0 , 则有 $a = 2t_0^2 - t_0$, $t_0 > \frac{1}{2}$

且 $g(t)$ 在 $(0, t_0)$ 单调递减, 在 $(t_0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $g(t) \geq g(t_0) = t_0^2 - t_0 - (2t_0^2 - t_0) \ln t_0$, 则有 $\frac{t_0 - 1}{2t_0 - 1} - \ln t_0 \geq 0$,

记 $h(t) = \frac{t-1}{2t-1} - \ln t \left(t > \frac{1}{2} \right)$, 有 $h'(t) = \frac{(1-t)(4t-1)}{t(2t-1)^2}$,

所以 $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

则有 $h(t) \leq h(1) = 0$, 故可知 $t_0 = 1$, 所以 $a = 1$.

22. (12 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 过 F 的直线 $x - 4\sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$

与椭圆在第一象限交于 M 点, O 为坐标原点, 三角形 MFO 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 都在椭圆上, 且 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 判断 $\triangle ABC$ 的面积是否为定值, 并说明理由.

【解析】解析一:

(1) 过 F 的直线 $x - 4\sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ 得到 $F(-\sqrt{3}, 0)$

设 $M(x_1, y_1)$, 且 $x_1 > 0, y_1 > 0$

$S_{\triangle MFO} = \frac{1}{2} OF \cdot y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}$ 代入直线方程 $x - 4\sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}$

则 $\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 当直线 BC 的斜率存在时, 设直线 $BC: y = kx + m$ $B(x_1, y_1)$ $C(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{消 } y \text{ 得到关于 } x \text{ 的方程 } (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8km}{4k^2 + 1} \quad y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{4k^2 + 1}$$

$$\text{由 } O \text{ 为三角形的重心, 则 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \left(\frac{8km}{4k^2 + 1}, \frac{-2m}{4k^2 + 1} \right)$$

$$\text{点 } A \text{ 在椭圆上 则 } \frac{\left(\frac{8km}{4k^2 + 1} \right)^2}{4} + \left(\frac{-2m}{4k^2 + 1} \right)^2 = 1 \Rightarrow 4k^2 + 1 = 4m^2$$

$$BC = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = 4\sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{4k^2 - m^2 + 1}}{4k^2 + 1}$$

$$\text{点 } O \text{ 到直线 } BC \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

根据三角形重心性质:

$$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle OBC} = 3 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot d = 6\sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{4k^2 - m^2 + 1}}{4k^2 + 1} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}} = 6 \frac{\sqrt{3}m^2}{4m^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{当直线 } BC \text{ 的斜率不存在时 } BC = \sqrt{3}, \quad d = 1 \quad S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为定值 } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

解析二:

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x = -\sqrt{3}, \text{ 即 } c = \sqrt{3},$$

$$\text{设 } M(m, n) (m, n > 0), \text{ 则 } S_{\triangle MFO} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot n = \frac{\sqrt{3}n}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 所以 } n = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } m - 4\sqrt{3}n + \sqrt{3} = 0, \text{ 所以 } m = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + 3 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 2, \quad b = 1,$$

$$\text{所以所求的椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

$$(2) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 0 \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 \\ y_3 = -y_1 - y_2 \end{cases},$$

$$\text{由题知: } \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1, \frac{x_3^2}{4} + y_3^2 = 1,$$

$$\text{所以 } \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + y_1^2 + y_2^2 = 2, \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + (y_1 + y_2)^2 = 1,$$

$$\text{整理得 } \frac{x_1 x_2}{4} + y_1 y_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{而 } \left(\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 \right) \left(\frac{x_2^2}{4} + y_2^2 \right) = 1, \text{ 所以 } \frac{x_1^2 x_2^2}{16} + y_1^2 y_2^2 + \frac{x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2}{4} = 1,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{x_1 x_2}{4} + y_1 y_2 \right)^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2 y_1 y_2 + \frac{x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2}{4} = 1,$$

$$\text{即 } x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = 3,$$

$$\text{所以 } |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \sqrt{3},$$

结合三角形的面积公式（坐标式）得，

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(-y_1 - 2y_2) - (y_2 - y_1)(-x_1 - 2x_2)| = \frac{3}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

所以三角形 ABC 的面积为定值.

解析三：

$$(1) \text{ 依题意有 } c + \sqrt{3} = 0, \text{ 得 } c = -\sqrt{3},$$

$$\text{又 } S_{\triangle MFO} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 可得 } y_M = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } x_M = \sqrt{3}, \text{ 则 } \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1,$$

$$\text{解得 } a^2 = 4, b^2 = 1, \text{ 则椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$$

$$(2) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3),$$

$$\text{则有 } \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ y_1 = -y_2 - y_3 \end{cases}, \text{ 所以 } \frac{(x_2 + x_3)^2}{4} + (y_2 + y_3)^2 = 1,$$

$$\text{又 } \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1, \frac{x_3^2}{4} + y_3^2 = 1, \text{ 则有 } \frac{x_2 x_3}{4} + y_2 y_3 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{而}\left(\frac{x_2^2}{4}+y_2^2\right)\left(\frac{x_3^2}{4}+y_3^2\right)=\left(\frac{x_2x_3}{4}+y_2y_3\right)^2+\frac{(x_2y_3-x_3y_2)^2}{4}=1,$$

$$\text{则有}|x_2y_3-x_3y_2|=\sqrt{3}, \text{ 所以 } S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_3y_2|=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{故可知 } S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle OBC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 为定值.}$$