

2021 届高三年级苏州八校联盟第三次适应性检测

数 学 试 卷

(满分 150 分 考试时间 120 分钟)

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$ ， $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ，则 $M \cup N =$

A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$ C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 复数 $z \in \mathbb{C}$ ，在复平面内 z 对应的点 Z ，满足 $1 \leq |z - \frac{1}{1+i}| \leq 2$ ，则点 Z 所在区域的面积

A. π B. 2π C. 3π D. 4π

3. 《九章算术》是世界上最古老的数学著作之一，书中有如下问题：“今有金篦，长五尺，斩本一尺，重十斤，斩末一尺，重四斤，问次一尺各重几何？”意思是：“现有一根金杖，长 5 尺，一头粗，一头细，在粗的一端截下 1 尺，重 10 斤；在细的一端截下 1 尺，重 4 斤，问依次每一尺各重多少斤？”假设金杖由粗到细是均匀变化的，则截去粗端 2 尺后，金杖剩余部分的重量为

A. 15.5 斤 B. 16.5 斤 C. 17.5 斤 D. 18.5 斤

4. 设三点 A, B, C 不共线，则“向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 夹角是钝角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{BC}|$ ”的

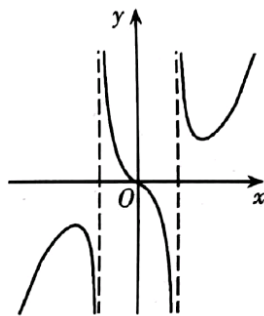
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $x = \log_{0.4} 0.5$ ， $y = \log_{1.5} 0.5$ ，则

A. $xy < x + y < 0$ B. $x + y < xy < 0$
C. $x + y < 0 < xy$ D. $xy < 0 < x + y$

6. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像如右图所示，则此函数可能是

A. $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{x^2 + |x| - 2}$ B. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + |x| - 2}$
C. $f(x) = \frac{x^3 + x}{e^{|x|-1} - e^{1-|x|}}$ D. $f(x) = \frac{x^3 - x}{e^{|x|-1} - e^{1-|x|}}$



(第 6 题图)

7. 若数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1=1, F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2} (n\geq 3)$, 则 $\{F_n\}$ 称为斐波那契数列, 它是由中世纪意大利数学家斐波那契最先发现. 它有很多美妙的特征, 如当 $n\geq 2$ 时, 前 n 项之和等于第 $n+2$ 项减去第2项; 随着 n 的增大, 相邻两项之比越来越接近0.618等等. 若第30项是832040, 请估计这个数列的前30项之和最接近

(备注: $0.618^2 \approx 0.38, 1.618^2 \approx 2.61$)

- A. 31万 B. 51万 C. 217万 D. 317万
8. 平面直角坐标系 xOy 中, 若点的横、纵坐标均为整数, 则称该点为整点. 已知点 $A(-\sqrt{6}, 0), B(\sqrt{6}, 0)$, 若整点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \leq 4$, 则点 P 的个数为
- A. 10 B. 11 C. 14 D. 15

二、多项选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 只有多项符合题目要求, 全部选对得5分, 部分选对得2分, 有选错得0分.

9. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2$, 则
- A. $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上递增 B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称
- C. $f(x)$ 最小正周期为 π D. $f(x)$ 的值域为 $[0, 4]$
10. 某学校组织知识竞赛, 每班组成四人小组参加比赛, 比赛采用抢答形式, 答对则得5分, 否则得0分. 高三(10)班由甲、乙、丙、丁四人组队参赛. 最后统计结果为: 甲、乙、丙、丁四人得分恰好由高到低排列, 且均不相同; 甲答对题个数的2倍小于丁答对题个数的3倍, 则
- A. 甲至少答对了11道题
- B. 乙至少答对了9道题
- C. 丁至少答对了8道题
- D. 高三(10)班至少获得了170分
11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 凸四边形 $ABCD$ 的4个顶点均在抛物线 $E: y^2=2x$ 上, 则
- A. 四边形 $ABCD$ 不可能为平行四边形
- B. 存在四边形 $ABCD$, 满足 $\angle A = \angle C$
- C. 若 AB 过抛物线 E 的焦点 F , 则直线 OA, OB 斜率之积恒为 -2
- D. 若 $\triangle OAC$ 为正三角形, 则该三角形的面积为 $12\sqrt{3}$

12. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (底面为平行四边形的四棱柱) 中, $AB=AD=AA_1=2$,

$\angle A_1AB = \angle DAB = \angle A_1AD = 60^\circ$, 则

A. 线段 AC_1 的长度为 $2\sqrt{6}$

B. 异面直线 BD_1 、 B_1C 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$

C. 对角面 BB_1D_1D 的面积为 $4\sqrt{3}$

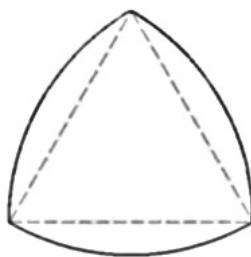
D. 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $4\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 以坐标轴为对称轴的等轴双曲线 C 经过点 $A(-3, 1)$, 则 C 的标准方程为 ▲.

14. $(x + \frac{y^2}{x})^5 (x + y)^5$ 展开式中, $x^8 y^2$ 的系数为 ▲.

15. “莱洛三角形”是机械学家莱洛研究发现的一种曲边三角形, 转子发动机的设计就是利用了莱洛三角形. 转子引擎只需转一周, 各转子便有一次进气、压缩、点火与排气过程, 相当于往复式引擎运转两周, 因此具有小排气量就能成就高动力输出的优点. 另外, 由于转子引擎的轴向运转特性, 它不需要精密的曲轴平衡就可以达到非常高的运转转速. “莱洛三角形”是分别以正三角形的顶点为圆心, 以其边长为半径作圆弧, 由这三段圆弧组成的曲边三角形(如下图所示). 设“莱洛三角形”曲边上两点之间的最大距离为 2, 则该“莱洛三角形”的面积为 ▲.



(第 15 题图)

16. 已知函数 $f(x) = (2x^2 - 4x + 3)(e^{x-1} - e^{1-x}) - 2x + 1$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m ,

则 $M + m =$ ▲.

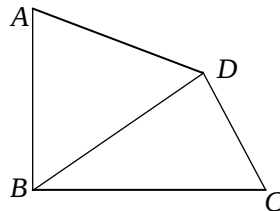
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答时应写出说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $BC=1$ ， $\angle ABC=90^\circ$ ， $\angle BCD=60^\circ$ ， $\angle BAD=75^\circ$ 。

(1) 若 $\angle CBD=30^\circ$ ，求三角形 ABD 的面积；

(2) 若 $AD=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ，求 $\angle CBD$ 的大小。



(第 17 题图)

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且各项均为正数， $a_1=2$ ， a_2+a_3 是 a_3 与 a_4 的等差中项。记

正项数列 $\{b_n\}$ 前 n 项之积为 T_n ， $b_1=1$ ， $T_n^2=a_{n(n-1)}$ ($n \geq 2$)。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：
$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i - 1}{(2b_i - i)(2b_{i+1} - i - 1)} \geq \frac{1}{2} \quad (n \in N_+).$$

19. (本小题满分 12 分)

如图，多面体 $PQABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB=PA=2$ ，

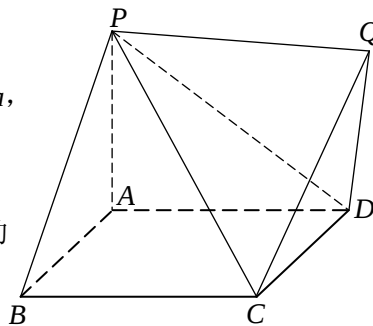
$\angle ABC=60^\circ$ ， $QC=QD=2\sqrt{2}$ ， $PQ=a$ ($a > 0$)。

(1) 设点 F 为棱 CD 的中点，求证：对任意的正数 a ，

四边形 $PQFA$ 为平面四边形；

(2) 当 $a=\sqrt{14}$ 时，求直线 PQ 与平面 PBC 所成角的

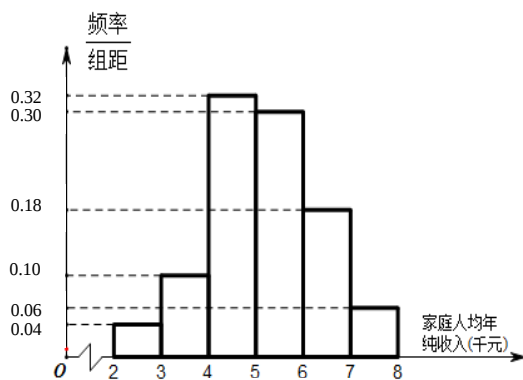
正弦值。



(第 19 题图)

20. (本小题满分 12 分)

某贫困地区截至 2016 年底，按照农村家庭人均年纯收入 8000 元的小康标准，该地区仅剩部分家庭尚未实现小康．现从这些尚未实现小康的家庭中随机抽取 50 户，得到这 50 户 2016 年的家庭人均年纯收入的频率分布直方图．



(第 20 题图)

- (1) 将家庭人均年纯收入不足 5000 元的家庭称为“特困户”，若从这 50 户中再取出 10 户调查致贫原因，求这 10 户中含有“特困户”的户数 X 的数学期望；
- (2) 假设 2017 年底该地区有 1000 户居民，其中 900 户为小康户，100 户为“特困户”，若每经过一年的脱贫工作后，“特困户”中有 90% 变为小康户，但小康户仍有 $t\%$ ($0 < t < 10$) 变为“特困户”，假设该地区居民户数保持不变，记经过 n 年脱贫工作后该地区小康户数为 a_n .
 - (i) 求 a_1 并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式；
 - (ii) 要使经 2 年脱贫工作后该地区小康户数至少有 950 户，求最大的正整数 t 的值．

21. (本小题满分 12 分)

已知圆 $E: (x+1)^2 + y^2 = 8$, 点 $F(m, 0) (m > 0)$, P 是圆 E 上一点, 线段 PF 的垂直平分线 l 与直线 EP 相交于点 Q .

(1) 若 $m=2$, 点 P 在圆 E 上运动时, 点 Q 的轨迹是什么? 说明理由;

(2) 若 $m=1$, 点 P 在圆 E 上运动时, 点 Q 的轨迹记为曲线 C . 过 E 点作两条互相垂直的直线 l_1 、 l_2 , l_1 与曲线 C 交于两点 A 、 B , l_2 与曲线 C 交于两点 C 、 D , M 为线段 AB 的中点, N 为线段 CD 的中点. 试问, 直线 MN 是否过定点? 若过定点, 并求出该定点的坐标, 若不过定点, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$.

(1) 设函数 $h(x) = f(x) - (x-1) \cdot g(x)$, 当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, 求函数 $h(x)$ 零点的个数;

(2) 求证: $g(x) \cdot g'(x) + 1 < x \cdot f(x) - \ln x$.