2021 届高考考前指导卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，$C=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$，则 C 中元素的个数为

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

2．若随机变量 $X\sim B(5,p)$，$D(X)=\dfrac{5}{4}$，则 $E(X)=$

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{15}{16}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

3．设 λ 为实数，已知向量 $\boldsymbol{m}=(1,\lambda)$，$\boldsymbol{n}=(2,-1)$．若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，则向量 $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

4．为了更好地管理班级，班主任决定选若干名学生担任班主任助理，于是征求语、数、英三科任课教师的意见．

语文老师：“如果不选小李，那么不选小宋”；

数学老师：“如果不选小宋，那么选小李”；

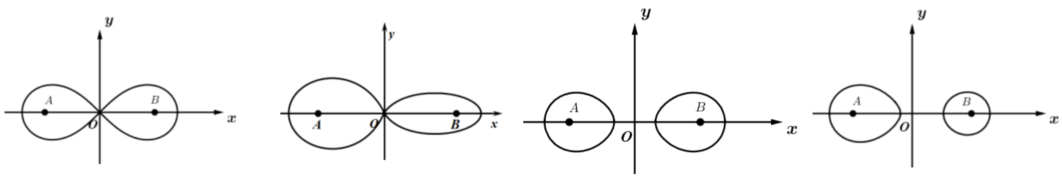
英语老师：“在小宋和小李两人中选一人”．

若班主任同时采纳了三人的建议，则作出的选择是

A．选小宋，不选小李　　B．两人都选

C．选小李，不选小宋　　D．两人都不选

5．在平面直角坐标系 xOy 中，已知 A,B 是两个定点，满足 $|PA|\cdot|PB|=a$（a 为大于 0 的常数）的点 P 的轨迹称为卡西尼卵形线，它是以发现土星卫星的天文学家乔凡尼·卡西尼的名字命名．当 A,B 坐标分别为 $(-1,0)$，$(1,0)$ 且 $a=1$ 时，卡西尼卵形线大致为



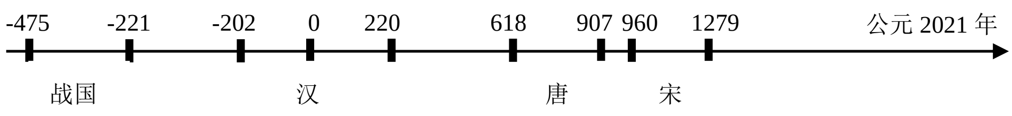
A　　B　　C　　D

6．生物体死亡后，它机体内原有的碳 14 含量 P 会按确定的比率衰减（称为衰减率），P 与死亡年数 t 之间的函数关系式为 $P=(\dfrac{1}{2})^{\frac{t}{a}}$（其中 a 为常数），大约每经过 5730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”．若 2021 年某遗址文物出土时碳 14 的残余量约占原始含量的 79%，则可推断该文物属于

A．战国　　B．汉　　C．唐　　D．宋

参考数据：$\log_2 0.79\approx -0.34$．

参考时间轴：



7．已知 i 为虚数单位，则复数 $z=1+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2+\cdots+2020\mathrm{i}^{2019}+2021\mathrm{i}^{2020}$ 的虚部为

A．-1011　　B．-1010　　C．1010　　D．1011

8．若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-\pi)=0$，则下列取值范围中的每个 x 都能使不等式 $\sin x\cdot f(x+\pi)\geqslant 0$ 成立的是

A．$[-2\pi,0]$　　B．$[0,2\pi]$　　C．$[-\pi,\pi]$　　D．$\{x\mid x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

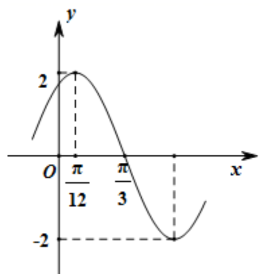
9．右图是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$ 的部分图象，则

A．函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 π

B．直线 $x=\frac{5}{6}\pi$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴

C．点 $(\frac{5}{6}\pi,0)$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一个对称中心

D．函数 $y=f(x-\frac{\pi}{6})$ 为奇函数



10．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(2,-1)$，$N(-2,1)$，动点 P 满足 $|PM|^2-|PN|^2=a$（$a\in\mathbf{R}$），记点 P 的轨迹为曲线 C，则

A．存在实数 a，使得曲线 C 上所有的点到点 $(1,\frac{a}{4})$ 的距离大于 2

B．存在实数 a，使得曲线 C 上有两点到点 $(-\sqrt{5},0)$ 与 $(\sqrt{5},0)$ 的距离之和为 6

C．存在实数 a，使得曲线 C 上有两点到点 $(-\sqrt{5},0)$ 与 $(\sqrt{5},0)$ 的距离之差为 2

D．存在实数 a，使得曲线 C 上有两点到点 $(a,0)$ 的距离与到直线 $x=-a$ 的距离相等

11．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,M 分别为棱 BC,CD,CC_1 的中点，P 是线段 A_1C_1 上的动点（含端点），则

A．$PM\perp BD$

B．$AC_1/\!/$ 平面 EFM

C．PE 与平面 $ABCD$ 所成角正切值的最大值为 $2\sqrt{2}$

D．当 P 位于 C_1 时，三棱锥 $P-CEF$ 的外接球体积最小

12．已知对任意 $x,y\in(0,2)$，$(x-1)^3-3y\geqslant(1-y)^3+3x-6$ 恒成立，则

A．$x+y\geqslant 2$　　B．$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant\frac{9}{2}$

C．$x^2+3xy\leqslant 4$　　D．$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\leqslant 2\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$(1-2x)(1+x)^4$ 的展开式中，x^2 的系数为________．

14．已知函数 $f(x)$ 满足：① $f(0)=0$；②在 $[1,3]$ 上是减函数；③ $f(1+x)=f(1-x)$．请写出一个满足以上条件的 $f(x)=$________．

15．二进制是广泛采用的一种数制，我国古老的易经中就有二进制的思想．二进制数据是用 0 和 1 两个数码来表示的数. 它的基数为 2，进位规则是“逢二进一”，借位规则是“借一当二”．例如二进制数 1011 表示十进制数$1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1=11$，现有五个二进制数$101$，$1100$，$11001$，$10111$，$111111$，其中十进制为偶数的是________；从中随机选取两个数，它们的和不大于 35（十进制）的概率为________.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 已知四棱锥$P-ABCD$的体积为V，底面$ABCD$是平行四边形，E，F 分别为棱PC，PD的中点，则四棱锥$P-ABEF$的体积为________（用V表示）.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分 10 分）

在①$BD=CD$且$AD=\sqrt{2}$，②AD平分$\angle BAC$且$AD=\dfrac{3}{2}$，③$AD\perp BC$且$AD=2$这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并加以解答.

是否存在$\triangle ABC$，其中角A，B，C的对边分别是a，b，c，若$A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，点D在线段BC上，________？若存在，求$\triangle ABC$的周长；若不存在，请说明理由.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

某食品店为了了解气温对销售量的影响，随机记录了该店 1 月份中 5 天的日销售量y（单位：千克）与该地当日最低气温x（单位：℃）的数据，如下表：

x	2	5	8	9	11
y	12	10	8	8	7

（1）求出y与x的回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（2）判断y与x之间是正相关还是负相关；若该地 1 月份某天的最低气温为6 ℃，请用所求回归方程预测该店当日的销售量；

（3）设该地 1 月份的日最低气温$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ近似为样本平均数$\bar{x}$，σ^2近似为样本方差s^2，求$P(3.8<X<13.4)$.

附：①回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}{x_i}^2-n(\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

②$\sqrt{10}\approx 3.2$，$\sqrt{3.2}\approx 1.8$，若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$.

19．（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n， $a_2=4$， $2S_n=n(a_n+1)\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）对任意$m\in\mathbf{N}^*$，将数列$\{a_n\}$中落入区间$(3^m, 9^m)$内的项的个数记为b_m，求数列$\{b_m\}$的前 m 项和T_m．

20．（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，设 F 为椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左焦点，左准线与 x 轴交于点 P，M 为椭圆 C 的左顶点，已知椭圆长轴长为 8，且$\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MF}$．

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）若过点 P 的直线与椭圆交于两点A, B，设直线AF, BF的斜率分别为k_1, k_2．

①求证：k_1+k_2为定值;

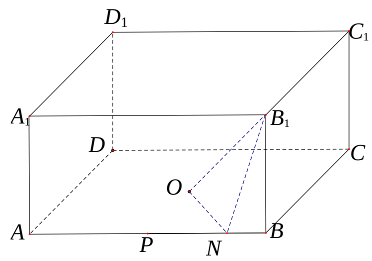
②求$\triangle ABF$面积的最大值.

21．（本小题满分 12 分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，AC, BD相交于点O，P是线段AB的中点，已知$AB=BC=4, AA_1=2$．

（1）求证：$OB_1\perp PA_1$；

（2）若 N 是线段 PB 上异于端点的点，求过B_1, N, O三点的平面被长方体所截面积的最小值.



22．（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=ae^x-x^2\ (a\in\mathbf{R})$（其中$e\approx2.71828$为自然对数的底数）.

（1）当$a=1$时，求证：函数$f(x)$图象上任意一点处的切线斜率均大于$\dfrac{1}{2}$；

（2）若$f(x)>\dfrac{1}{2}\ln(x+1)+\cos x$对于任意的$x\in[0,+\infty)$恒成立，求实数 a 的取值范围.