# 盐城市2021届高三年级第三次模拟考试

# 数学参考答案

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．A　　2．D　　3．C　　4．C　　5．A　　6．D　　7．B　　8．A

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．AC　　10．ABD　　11．ACD　　12．ABD

三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13．185　　14．$(0，\frac{3\pi}{4})$　　15．$-\frac{3}{4}$　　16．2

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：(1)因为$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以$(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

即$(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，　　……2分

所以$\frac{2}{3}bc\cdot\cos A+\frac{1}{3}b^2=0$，

因为$b=c$，所以$\cos A=-\frac{1}{2}$，　　……4分

因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$．　　……5分

(2)因为$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}bc\cdot\cos A+\frac{1}{3}b^2=0$，

所以$b^2+c^2-a^2+b^2=0$，即$2b^2+c^2-a^2=0$，　　……6分

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\frac{a^2-c^2}{2}}{2ac}=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{3c^2}{2}}{2ac}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，　　……8分

因为$0<B<\pi$，所以$B$的最大值为$\frac{\pi}{6}$．　　……10分

18．解：

选②．

证明：由$a_{n+1}=a_n^2$，且$a_1=2$，所以$a_n>0$，

所以$\lg a_{n+1}=\lg a_n$，$\lg a_n=2^{n-1}\lg 2$，$a_n=2^{2^{n-1}}$，　　……5分

当$n\geqslant2$时，只需证明$2^{n-1}\geqslant n$，

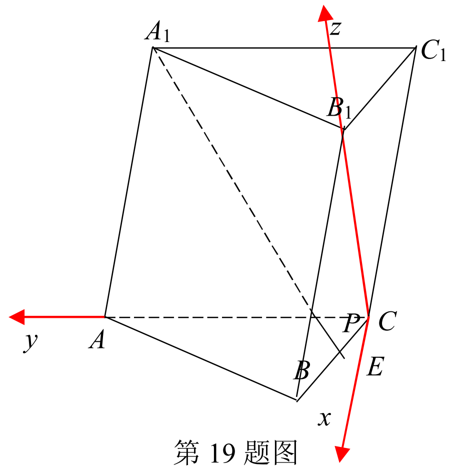
令 $b_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$，则 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{n+1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n-1}}=\dfrac{1-n}{2^n}<0$， ……10 分

所以 $b_n\leqslant b_2=1$，所以$2^{n-1}\geqslant n$ 成立.

综上所述，当 $a_1=2$ 且 $n\geqslant 2$ 时，$a_n\geqslant 2^n$ 成立. ……12 分

注：选②为假命题，不得分，选③参照给分.

19.




第 19 题图

解：(1)证明：因为 $AC=2BC=2$，所以 $BC=1$.

因为 $2\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$.

在$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，即$\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{\sin B}$，

所以 $\sin B=1$，即 $AB\perp BC$. ……2 分

又因为平面 $ABC\perp$ 平面$B_1C_1CB$，平面 $ABC\cap$ 平面$B_1C_1CB=BC$，$AB\subset$平面 $ABC$，

所以 $AB\perp$ 平面$B_1C_1CB$.

又 $B_1C\subset$平面$B_1C_1CB$，所以 $AB\perp B_1C$，

在$\triangle B_1BC$ 中，$B_1B=2$，$BC=1$，$\angle CBB_1=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $B_1C^2=B_1B^2+BC^2-2B_1B\cdot BC\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=3$，即 $B_1C=\sqrt{3}$，

所以 $B_1C\perp BC$. ……4 分

而 $AB\perp B_1C$，$AB\subset$平面 $ABC$，$BC\subset$平面 $ABC$，$AB\cap BC=B$，

所以 $B_1C\perp$ 平面 $ABC$.

又 $B_1C\subset$平面$ACB_1$，所以平面 $ABC\perp$ 平面$ACB_1$. ……6 分

(2)在平面 $ABC$ 中过点 $C$ 作 $AC$ 的垂线 $CE$，分别以 $CE$，$CA$，$CB_1$ 所在直线为 $x$，$y$，$z$ 轴建

立如图所示的空间直角坐标系：

则 $B(\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2}，0)$，$A(0，2，0)$，$B_1(0，0，\sqrt{3})$，

所以 $P(\frac{\sqrt{3}}{4}，\frac{1}{4}，0)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BA}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{3}{2}，0)$， ……8 分

所以 $A_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{3}{2}，\sqrt{3})$，所以$\overrightarrow{A_1P}=(\frac{3\sqrt{3}}{4}，-\frac{5}{4}，-\sqrt{3})$，

平面 $ACB_1$ 的一个法向量为$\vec{n}=(1，0，0)$， ……10 分

设直线 $A_1P$ 与平面 $ACB_1$ 所成的角为 $\alpha$，

则 $\sin\alpha=|\cos<\overrightarrow{A_1P}，\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{A_1P}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1P}||\vec{n}|}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\frac{27}{16}+\frac{25}{16}+3}}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$. ……12 分

20．解：

(1)由 $x^2=2py$，得 $y=\frac{1}{2p}x^2$，所以 $y'=\frac{1}{p}x$，

所以直线 $l$ 的斜率为$\frac{1}{p}x_0$. ……3 分

(2)设 $P(x_0，y_0)$，则 $B(-x_0，-y_0)$，$k_{PB}=\frac{y_0}{x_0}$，

由(1)知 $k_{PA}=\frac{1}{p}x_0=\frac{y_0}{2x_0}$， ……5 分

设 $A(x_1，y_1)$，所以$\frac{y_0^2}{2}+x_0^2=1$，$\frac{y_1^2}{2}+x_1^2=1$，

作差得$\frac{(y_0+y_1)(y_0-y_1)}{2}+(x_0+x_1)(x_0-x_1)=0$，

即$\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}\cdot\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=-\frac{1}{2}$，所以 $k_{PA}k_{AB}=-\frac{1}{2}$， ……10 分

所以$\frac{y_0}{2x_0}k_{AB}=-\frac{1}{2}$，即 $k_{AB}=-\frac{x_0}{y_0}$，

所以 $k_{PB}k_{AB}=-1$，所以 $AB\perp PB$. ……12 分

注：其他解法参照评分.

21．解：(1)$P(\xi=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$P(\xi=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$，$P(\xi=1)=\frac{1}{3}$， ……3 分

则 $\xi$ 的概率分布如下表：

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

所以 $E(\xi)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$. ……5 分

(2)设运行“归零”程序中输出 $n(0\leqslant n\leqslant k-1)$的概率为 $P_n$，得出 $P_n=\frac{1}{n+1}$，……7 分

法一：则 $P_n=P_{n+1}\times\frac{1}{n+1}+P_{n+2}\times\frac{1}{n+2}+P_{n+3}\times\frac{1}{n+3}+\cdots+P_{k-1}\times\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}$，

故 $0\leqslant n\leqslant k-2$ 时，$P_{n+1}=P_{n+2}\times\frac{1}{n+2}+P_{n+3}\times\frac{1}{n+3}+\cdots+P_{k-1}\times\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}$，

以上两式作差得，$P_n-P_{n+1}=P_{n+1}\times\frac{1}{n+1}$，则 $P_n=P_{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}$， ……10 分

则 $P_{n+1}=P_{n+2}\times\frac{n+3}{n+2}$，$P_{n+2}=P_{n+3}\times\frac{n+4}{n+3}$，…，$P_{k-2}=P_{k-1}\times\frac{k}{k-1}$，

则 $P_nP_{n+1}P_{n+2}\cdots P_{k-1}=P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}\cdots P_{k-1}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+3}{n+2}\times\frac{n+4}{n+3}\times\cdots\times\frac{k}{k-1}$，

化简得 $P_n=P_{k-1}\times\frac{k}{n+1}$，而 $P_{k-1}=\frac{1}{k}$，故 $P_n=\frac{1}{n+1}$，

又 $n=k-1$ 时，$P_n=\frac{1}{n+1}$也成立，故 $P_n=\frac{1}{n+1}(0\leqslant n\leqslant k-1)$. ……12 分

法二：同法一得 $P_n=P_{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}$， ……9 分

则 $P_0=P_1\times\frac{2}{1}$，$P_1=P_2\times\frac{3}{2}$，$P_2=P_3\times\frac{4}{3}$，…，$P_{n-1}=P_n\times\frac{n+1}{n}$，

则 $P_0P_1P_2\cdots P_{n-1}=P_0P_1P_2\cdots P_n\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}$，

化简得 $P_0=P_n\times(n+1)$，而 $P_0=1$，故 $P_n=\frac{1}{n+1}(0\leqslant n\leqslant k-1)$，

又 $n=0$ 时，$P_n=\frac{1}{n+1}$也成立，故 $P_n=\frac{1}{n+1}(0\leqslant n\leqslant k-1)$. ……12 分

法三：记 $P_m(n)$表示在出现 $m$ 的条件下出现 $n$ 的概率，

则 $P_{n+1}(n)=\frac{1}{n+1}$，$P_{n+2}(n)=\frac{1}{n+2}P_{n+1}(n)+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n+1}$，

$P_{n+3}(n)=\frac{1}{n+3}P_{n+2}(n)+\frac{1}{n+3}P_{n+1}(n)+\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n+1}$， ……9 分

依此类推，$P_k(n)=\frac{1}{k}P_{k-1}(n)+\frac{1}{k}P_{k-2}(n)+\cdots+\frac{1}{k}P_{n+1}(n)+\frac{1}{k}$，

所以 $P_k(n)=\frac{1}{k}(\frac{1}{n+1}\cdot(k-n-1)+1)=\frac{1}{n+1}$. ……12 分

法四：记 $P_k(n)$表示在出现 $k$ 的条件下出现 $n$ 的概率，

则 $P_k(n)=\frac{1}{k}P_{k-1}(n)+\frac{1}{k}P_{k-2}(n)+\cdots+\frac{1}{k}P_{n+1}(n)+\frac{1}{k}$，

则 $kP_k(n)=P_{k-1}(n)+P_{k-2}(n)+\cdots+P_{n+1}(n)+1$，①

则$(k-1)P_{k-1}(n)=P_{k-2}(n)+\cdots+P_{n+1}(n)+1$，②

①－得 $kP_k(n)-(k-1)P_{k-1}(n)=P_{k-1}(n)$， ……9 分

则 $P_k(n)=P_{k-1}(n)(k\geqslant n+2)$，

则 $P_k(n)=P_{n+1}(n)=\dfrac{1}{n+1}$. ……12 分

22．解：(1)由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$ 得 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^n-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$,

因 $n\in\mathbf{N}^*$，由 $f'(x)=0$，得 $x=e^{\frac{1}{n}}$, ……1 分

当 $x>e^{\frac{1}{n}}$ 时，$f'(x)<0$；当时 $0<x<e^{\frac{1}{n}}$，$f'(x)>0$；

故函数 $f(x)$ 在 $(0，e^{\frac{1}{n}})$ 上单调递增，在 $(e^{\frac{1}{n}}，+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 不单调. ……3 分

(2)当 $a=1$ 时，可证明 $e^x>x^2\ln x+\sin x$ 对 $\forall x\in(0，+\infty)$ 恒成立，

当 $x\in(0，1)$ 时，$x^2\ln x\leqslant 0$，$\sin x\leqslant 1$，$e^x>1$，不等式成立； ……4 分

当 $x\in(1，e)$ 时，$x^2\ln x+\sin x<x^2+1$，令 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$,

所以 $g'(x)=\dfrac{2x-(x^2+1)}{e^x}\leqslant 0$，则函数 $g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(1)=\dfrac{2}{e}<1$,

所以 $e^x>x^2+1$，原不等式成立； ……7 分

当 $x\in(e，+\infty)$ 时，因 $x^2\ln x+\sin x\leqslant x^2\ln x+1$，故只需证 $e^x>x^2\ln x+1$,

即证 $\dfrac{e^x}{x^3}>\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x^3}$，只需证 $\dfrac{e^x}{x^3}>\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{e^3}$,

在(1)中令 $n=1$，可得 $f(x)\leqslant f(e)=\dfrac{1}{e}$，故 $\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{e^3}\leqslant\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^3}$,

令 $h(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$，所以 $h'(x)=\dfrac{e^x(x-3)}{x^4}=0$，解得 $x=3$,

当 $x\in(e，3)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(3，+\infty)$ 时，$h'(x)>0$,

所以 $h(x)\geqslant h(3)=\dfrac{e^3}{27}>\dfrac{1}{2}$，而 $\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{e^3}\leqslant\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^3}<\dfrac{1}{2}$,

所以原不等式也成立.

综上所述，当 $a=1$ 时，$e^x>x^2\ln x+\sin x$ 对 $\forall x\in(0，+\infty)$ 恒成立. ……12 分

注：当 $a=2$ 或 $a=3$ 时结论也成立，请参照评分；当 $a\geqslant 4$ 时结论不成立.