2021届高三百师联盟3月摸底联考数学试卷

2021．3

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共计40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1．已知集合 M＝$\left\{x\middle|y=\sqrt{2x-x^2}\right\}$，N＝$\left\{x\middle|y=\log_2(x-1)^2\right\}$，则集合 M$\cap$N＝

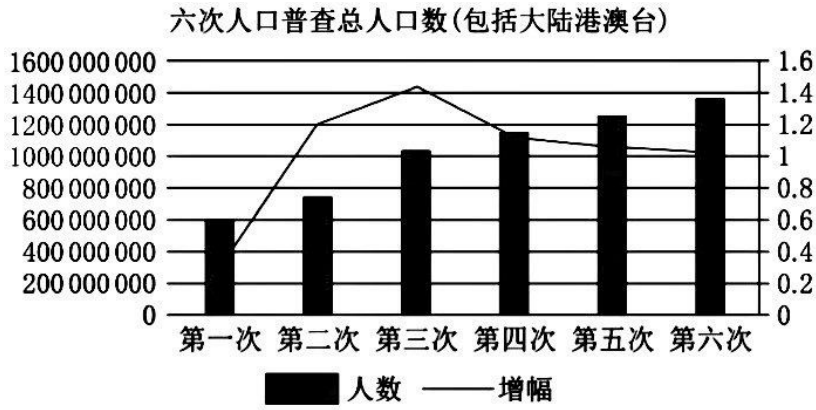
A．$\left\{x\middle|0\le x\le 2\right\}$　　　　B．$\left\{x\middle|0\le x<1\text{或}1<x\le 2\right\}$

C．$\left\{x\middle|1<x\le 2\right\}$　　　　D．$\left\{x\middle|0<x<2\right\}$

2．复数 z 满足：$z+\dfrac{1}{2-\mathrm{i}}=2$，$\bar{z}$＝

A．$\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{15}\mathrm{i}$　　B．$\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　　C．$\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{15}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

3．人口普查是世界各国所广泛采用的搜集人口资料的一种科学方法，是提供全国基本人口数据的主要来源．根据人口普查的基本情况，可以科学的研究制定社会、经济、科教等各项发展政策，是国家科学决策的重要基础工作，人口普查资料是制定人口政策的依据和前提．截止2020年10月10日，我国共进行了六次人口普查，右图是这次人口普查的人数和增幅情况，下列说法正确的是



A．人口数逐次增加，第二次增幅最大

B．第六次普查人数最多，第四次增幅最小

C．第六次普查人数最多，第三次增幅最大

D．人口数逐次增加，从第二次开始增幅减小

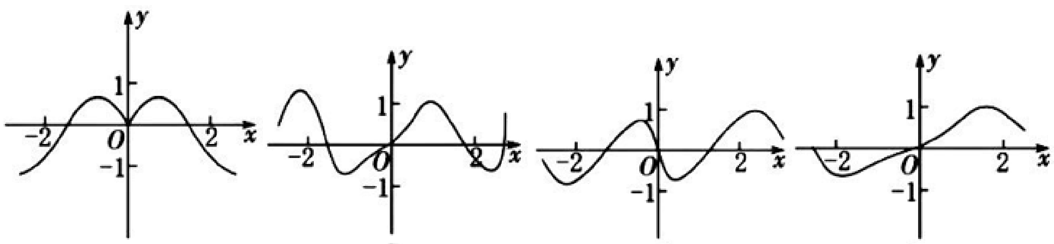
4．已知圆 C：$x^2+y^2-4x-2y+3=0$，过原点的直线 l 与圆 C 相交于 A，B 两点，则当△ABC 的面积最大时，直线 l 的方程为

A．$y=0$ 或 $y=\dfrac{4}{3}x$　B．$y=2x$ 或 $y=\dfrac{3}{2}x$　C．$x=0$ 或 $y=\dfrac{1}{3}x$　D．$y=\dfrac{3}{4}x$

5．将3名男生1名女生分配到甲、乙、丙三个社区参加社会实践，每个社区至少一名同学，则恰好一名女生和一名男生分到甲社区的概率是

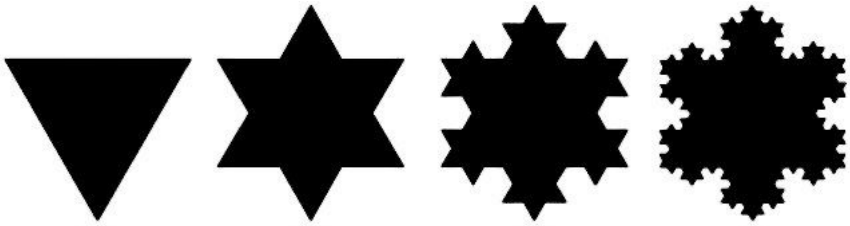
A．$\dfrac{1}{12}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{6}$

6．函数 $f(x)=\ln(|x|+1)\cdot\sin 2x$ 的部分图象大致是



A　　B　　C　　D

7．雪花曲线因其形状类似雪花而得名，它的产生与雪花类似，由等边三角形开始，把三角形的第一条边三等分，并以每一条边三等分后的中段为边，向外作新的等边三角形，但要去掉与原三角形叠合的边，接着对每一个等边三角形"尖出"的部分继续上述过程，即以每条边三等分后的中段为边向外作新的等边三角形（如图：(2)，(3)，(4) 是等边三角形 (1) 经过第一次，第二次，第三次，变化所得雪花曲线）．若按照上述规律，一个边长为 3 的等边三角形，经过四次变化得到的雪花曲线的周长是

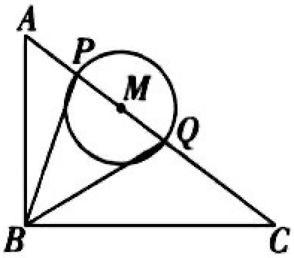


(1)　(2)　(3)　(4)

A．$\dfrac{143}{3}$　　B．$\dfrac{204}{9}$　　C．$\dfrac{256}{9}$　　D．$\dfrac{64}{3}$

8．如图，直角三角形△ABC 中，∠ABC＝90°，AB＝3，BC＝4，M 点是线段 AC 一动点，若以 M 为圆心半径为 $\sqrt{5}$ 的圆与线段 AC 交于 P，Q 两点，

则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 的最小值为



第 8 题

A．$\dfrac{12}{15}$　　B．$\dfrac{19}{25}$

C．$\dfrac{9}{13}$　　D．$\dfrac{19}{15}$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9．对任意实数 a，b，c，有以下命题中，正确的是

A．若 $ac^2<bc^2$，则 $a<b$　　B．若 $a>b$，则 $\dfrac{a}{b}>1$

C．若 $\dfrac{1}{a^2}>\dfrac{1}{b^2}$，则 $a<|b|$　　D．若 $a>1>b>0$，则 $\log_a(a-b)>0$

10．设 M，N 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图象与直线 $y=2$ 的交点，若 M，N 两点距离的最小值为 6，P($-\dfrac{1}{2}$，2)是该函数图象上的一个点，则下列说法正确的是

A．该函数图象的一个对称中心是(7，0)

B．该函数图象的对称轴方程是 $x=-\frac{1}{2}+3k$，$k\in Z$

C．$f(x)$ 在$[-\frac{7}{2}，-\frac{1}{3}]$上单调递增

D．$f(x)=2\cos(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})$

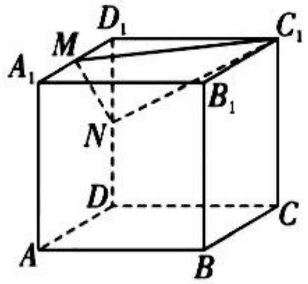
11．如图所示，在棱长为 1 的正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 A_1D_1，DD_1 的中点，则以下四个结论正确的是

A．B_1C // MN

B．$B_1C\perp$平面 MNC_1

C．A 到直线 MN 的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D．过 MN 作该正方体外接球的截面，所得截面的面积的最小值为$\frac{3}{8}\pi$



第 11 题

12．已知函数 $f(x)=\frac{m}{x}-\ln x+m$ 在区间(1，e)内有唯一零点，则 m 的可能取值为

A．$-\frac{e}{e^2+1}$　　B．$\frac{1}{e+1}$　　C．$\frac{e-1}{e+1}$　　D．$1+\frac{2}{e}$

三、填空题（本大题共 4 小题， 每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13．若 $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha$ ＝_______.

14．若 $(x^2+\frac{a}{x})^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 160，则 a＝_______.

15．函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，且 $f(1)=0$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，且 $f'(x)$＞0，则不等式 $(x-2)f(x)>0$ 的解集是_______.

16．过抛物线 C：x^2＝$2py$ 上点 M 作抛物线 D：y^2＝$4x$ 的两条切线 l_1，l_2，切点分别为 P，Q，若△MPQ 的重心为 G(1，$\frac{3}{2}$)，则 p＝_______.

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

在① $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$；② $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=n$；③ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=n^2$

这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答：

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求$\left\{\frac{(2n-1)a_n}{n(n+1)}\right\}$的前 n 项和 T_n．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（本小题满分 12 分）

已知 a，b，c 是△ABC 的内角 A，B，C 的对边，且 5cosBcosC＋2＝5sinBsinC＋cos2A．

（1）求角 A 的大小；

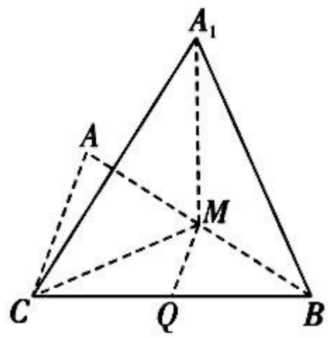
（2）若△ABC 的面积 S＝$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，c＝$\sqrt{3}$，求 sinBsinC 的值．

19．（本小题满分 12 分）

如图，在直角△ABC 中，直角边 AC＝2，∠A＝60°，M 为 AB 的中点，Q 为 BC 的中点，将三角形△AMC 沿着 MC 折起，使 A_1M⊥MB，(A_1 为 A 翻折后所在的点)，连接 MQ．

（1）求证：MQ⊥AB；

（2）求直线 MB 与面 A_1MC 所成角的正弦值．



20．（本小题满分 12 分）

近年来，我国的电子商务行业发展迅速，与此同时，相关管理部门建立了针对电商的商品和服务评价系统．现从评价系统中选出 200 次成功的交易，并对其评价进行统计，对商品的好评率为$\frac{3}{5}$，对服务的好评率为$\frac{7}{10}$，其中对商品和服务均为好评的有 80 次．

（1）是否可以在犯错误概率不超过 0.1 的前提下，认为商品好评与服务好评有关　　？

（2）若将频率视为概率，某人在该购物平台上进行的 4 次购物中，设对商品和服务全好评的次数为随机变量 X，求对商品和服务全好评的次数 X 的分布列及其期望．

参考公式：独立性检验统计量 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$ ．

临界值表：

P($K^2\geq k_0$)	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21．（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的上、下顶点分别为 A，B，P 为直线 y＝2 上的动点，当点 P 位于点(1，2)时，△ABP 的面积 $S_{\triangle ABP}$＝1，椭圆 C 上任意一点到椭圆的左焦点 F 的最短距离为$\sqrt{2}-1$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）连接 PA，PB，直线 PA，PB 分别交椭圆于 M、N（异于点 A，B）两点，证明：直线 MN 过定点．

22．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x+\sin x+x$，$x\in[0，\pi]$．

（1）证明：当 a＝－1 时，函数 $f(x)$ 有唯一的极大值点；

（2）当－2＜a＜0 时，证明：$f(x)<\pi$．

参考答案

1．B　2．A　3．C　4．A　5．D　6．B　7．C　8．B

9．AC　10．ABD　11．ACD　12．BC

13．$\frac{1}{3}$或 3　14．2　15．$(-\infty，1)\cup(2，+\infty)$　16．$\frac{3}{16}$

17．

解析：若选①，(1) $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，两边取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}$，又因为$\frac{1}{a_1}=1$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=2n-1$，故 $a_n=\frac{1}{2n-1}$. (2) 由(1)得：$\frac{(2n-1)a_n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. 若选②，(1) $a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n=n$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=n-1$，两式相减

得$(2n-1)a_n=1$，所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，$(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$，满足上式，则 $a_n=\frac{1}{2n-1}$. (2) 由(1)得：$\frac{(2n-1)a_n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. 若选③，(1) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=n^2$，$n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}=(n-1)^2$，两式相减得$\frac{1}{a_n}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，$(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$，所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，(2) 由(1)得：$\frac{(2n-1)a_n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

18.

解析：$5\cos(B+C)+2=2\cos^2 A-1$，$2\cos^2 A+5\cos A-3=0$，$\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-3$（舍去）. $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. (2) $S=\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$，$bc=6$，$c=\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{3}$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=12+3-6=9$，$a=3$，由正弦定理

得△ABC 外接圆直径，$2R=\frac{\alpha}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，$(2R)^2\sin B\sin C=6$，所以 $\sin B\sin C=\frac{1}{2}$.

19.

解析：(1) 取 A_1B 的中点为 N，连接 MN，NQ，因为 $A_1M\perp MB$，所以 $A_1B=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，$A_1C=2$，所以 $A_1C\perp A_1B$，又 $NQ\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}A_1C$，所以 $A_1B\perp QN$. 又△A_1MB 为等腰三角形，所以 $A_1B\perp NM$，$MN\cap QN=N$，所以 $A_1B\perp$ 面 MNQ，$QM\subset$ 面 MNQ，所以 $MQ\perp BA_1$. (2) $MQ\perp BA_1$，$MQ\perp BC$，$BC\cap BA_1=B$，所以 $QM\perp$ 面 A_1CB，取 QB 所在直线为 x 轴，QM 所在直线为 y 轴，过 Q 点作面 MCB 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系. 则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$M(0,1,0)$，$A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 设面 A_1MC 一个法向量为 $\boldsymbol{n}=$

(x,y,z)，$\overrightarrow{CM}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CA_1}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，得

$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ x+\sqrt{2}x=0\end{cases}$，取 $z=-1, x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{6}$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$，又 $\overrightarrow{MB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{MB}\rangle|=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，直线 MB 与面 A_1MC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

20.

解析：(1) 由题意可得关于商品和服务评价的 2×2 列联表如下：

	对服务好评	对服务不满意	总　计
对商品好评	80	40	120
对商品不满意	60	20	80
总　计	140	60	200

$K^2=\frac{200(1\,600-2\,400)^2}{140\times60\times120\times80}=1.587$，$1.587<2.706$，所以，不可以在犯错误概率不超过 0.1 的前提下，认为商品好评与服务好评有关. (2) 每次购物时，对商品和服务都好评的概率为 $\frac{2}{5}$，且 X 的取值可以是 0，1，2，3，4. 其中 $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{5^4}$；$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{5^4}$；$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{5^4}$；$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{96}{5^4}$；$P(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{5^4}$. X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{5^4}$	$\frac{216}{5^4}$	$\frac{216}{5^4}$	$\frac{96}{5^4}$	$\frac{16}{5^4}$

由于 $X\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$，则 $E(X)=\frac{8}{5}$.

21.

解析：(1) $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 2b=1, b=1, a^2-c^2=1$，设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，$F(-c,0)$，$MF^2=(x+c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2$，对称轴 $x=-\frac{a^2}{c}<-a$，区间 $x\in[-a,a]$ 为增区间，$x=-a$ 时，$MF_{\min}=a-c$，即 $a-c=\sqrt{2}-1$，$a+c=\sqrt{2}+1$，$a=\sqrt{2}$，所以椭圆方程 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. (2) 设 $P(t,2)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases} k_{AP}=\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{1}{t} \\ k_{BP}=\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{3}{t} \end{cases}$，所以有 $3x_2(y_1-1)=x_1(y_2+1)$，因为 $\frac{x_1^2}{2}=1-y_1^2=(1-y_1)(1+y_1)$，代入上式得 $\frac{-3}{2}x_1x_2=(y_1+1)(y_2+1)$，$\frac{-3}{2}x_1x_2=y_1y_2+(y_1+y_2)+1$. ①

设直线 $MN: y=kx+m$，代入 $x^2+2y^2=2$，$(1+2k^2)y^2-2my+m^2-2k^2=0$. $\begin{cases} y_1+y_2=\frac{2m}{1+2k^2} \\ y_1y_2=\frac{m^2-2k^2}{1+2k^2} \end{cases}$，②

$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$ ③

将②③代入①得 $2m^2+m-1=0$，$m=\frac{1}{2}$ 或 -1（舍去）. 直线 MN 过定点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

22.

解析：(1) 证明：$f'(x)=a\mathrm{e}^x+\cos x+1$，因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $1+\cos x\geqslant 0$，当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-\mathrm{e}^x+\cos x+1$，令 $g(x)=-\mathrm{e}^x+\cos x+1$，$g'(x)=-\mathrm{e}^x-\sin x<0$，$g(x)$ 在区间$[0,\pi]$上单调递减；$g(0)=-1+2=1$，$g(\pi)=-\mathrm{e}^x<0$，存在 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$，所以函数 $f(x)$递增区间是$[0,x_0]$，递减区间是$[x_0,\pi]$，所以函数 $f(x)$存在唯一的极大值点 x_0。(2) 当$-2<a<0$ 时，令 $h(x)=a\mathrm{e}^x+\sin x+x-\pi$，$h'x=a\mathrm{e}^x+\cos x+1$，$h''(x)=a\mathrm{e}^x-\sin x<0$，$h'(x)$在区间$[0,\pi]$上单调递减，$h'(0)=a+2>0$，$h'(\pi)=a\mathrm{e}^x<0$，存在 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $a\mathrm{e}^x+\cos x_0+1=0$，所以函数 $h(x)$在区间$[0,x_0]$上是递增函数，在区间$[x_0,\pi]$上是递减函数。$h(x)_{\max}=h(x_0)=a\mathrm{e}^x+\sin x_0+x_0-\pi$，$x_0\in(0,\pi)$，因为 $a\mathrm{e}^x+\cos x_0+1=0$，只需证 $h(x_0)=\sin x_0-\cos x_0+x_0-1-\pi<0$ 即可。$h'(x_0)=\cos x_0+\sin x_0+1$，$h'(x_0)>0$，$h(x_0)$在区间$(0,\pi)$上是增函数，$h(x_0)<h(\pi)=0$，即 $f(x)<\pi$。