

数学

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集为 U ，非空真子集 A, B, C 满足： $A \cap B = B$ ， $A \cup C = A$ ，则

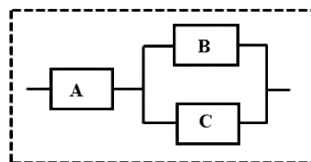
- A. $B \subseteq C$ B. $B \cap C = \emptyset$ C. $A \subseteq \complement_U B$ D. $\complement_U (B \cup C) = \emptyset$

2. 如图，某系统使用 A, B, C 三种不同的元件连接而成，每个元件是否正常工作互不影响，

当元件 A 正常工作 B, C 中至少有一个正常工作时系统即可正

常工作.若元件 A, B, C 正常工作的概率分别为 $0.7, 0.9, 0.8$ ，

则系统正常工作的概率为



- A. 0.196 B. 0.504 C. 0.686 D. 0.994

3. 某产品的宣传费用 x (单位：万元) 与销售额 y (单位：万元) 的统计数据如表所示：

x	4	5	6	7	8
y	60	80	90	100	120

根据上表可得回归方程 $\hat{y} = 14x + \hat{a}$ ，则宣传费用为 9 万元时，销售额最接近

- A. 123 万元 B. 128 万元 C. 133 万元 D. 138 万元

4. 化简 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \alpha\right)$ 可得

- A. $-\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ B. $-\frac{1}{2}\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$
C. $\frac{1}{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ D. $\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

5. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ ，设 $a = f(4^{0.4})$ ， $b = f\left(\left(\sqrt[4]{5}\right)^3\right)$ ， $c = f(25^{0.2})$ ，则

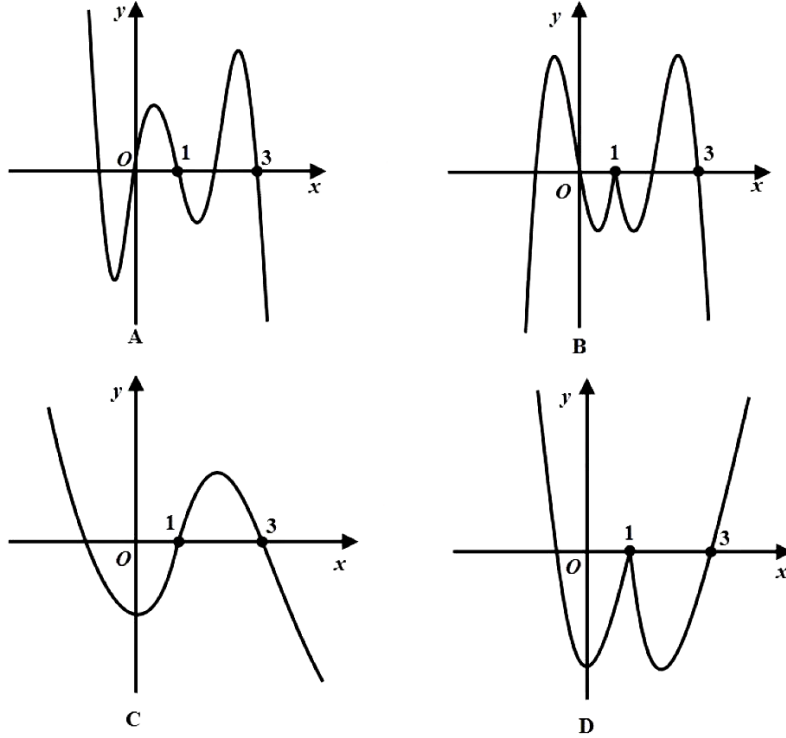
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

6. 某班数学课代表给全班同学们出了一道证明题.甲和丁均说自己不会证明；乙说：丙会证明；

丙说：丁会证明.已知四名同学中只有一人会证明此题，且只有一人说了真话.据此可以判定证明此题的人是

- A.甲 B.乙 C.丙 D.丁

7.函数 $y = 2^{|x-1|} \cdot \sin(\pi x)$ 的图象大致为



8.已知圆 $O_1: x^2 + y^2 + ty - 2 = 0$ 与 y 轴交于 A, B 两点,点 C 的坐标为 $(1,2)$.圆 O_2 过 A, B, C 三点,当实数 t 变化时,存在一条定直线 l 被圆 O_2 截得的弦长为定值,则此定直线 l 的方程为

- A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $2x - y = 0$ C. $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$ D. $\sqrt{2}x - y = 0$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9.为了解目前淮安市高一学生身体素质状况，对某校高一学生进行了体能抽测，得到学生的体

育成绩 $X \sim N(70, 100)$, 其中 60 分及以上为及格 , 90 分及以上为优秀.则下列说明正确的是

参 考 数 据 : 随 机 变 量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6826$,

$P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

A.该校学生体育成绩的方差为10

B.该校学生体育成绩的期望为 70

C.该校学生体育成绩的及格率不到85%

D.该校学生体育成绩不及格的人数和优秀的人数相当

10.设复数 $z = a + bi$ (i 为虚数单位) , 则下列说法正确的是

A.若 $a = 0, b = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{2021} z^k = i$

B.若 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $z^2 = \bar{z}$

C. “ $z \in \mathbf{R}$ ” 的充要条件是 “ $z = |z|$ ”

D.若 $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta (0 < \theta < \pi)$, 则复数 z 在复平面上对应的角在第一或第二象限

11.已知三棱锥 $P - ABC$ 的顶点均在半径为 5 的球面上 , $\triangle ABC$ 为等边三角形且外接圆半径为 4 , 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $P - ABC$ 的体积可能为

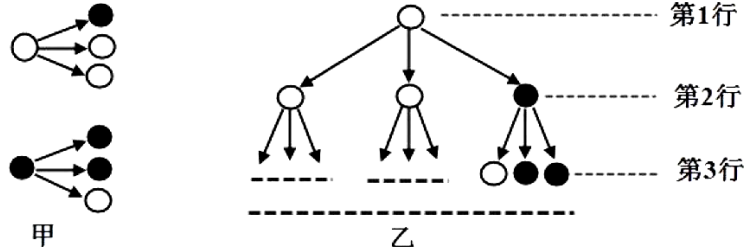
A. 20

B. 40

C. 60

D. 80

12.分形几何学是数学家伯努瓦·曼德尔布罗在 20 世纪 70 年代创立的一门新的数学学科 , 分形几何学不仅让人们感悟到数学与艺术审美的统一 , 而且还有其深刻的科学方法论意义.按照如图甲所示的分形规律可得如图乙所示的一个树形图 :



记图乙中第 n 个白圈的个数为 a_n ，黑圈的个数为 b_n ，则下列结论中正确的有

A. $a_4 = 14$

B. 40 是数列 $\{b_n\}$ 中的项

C. 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，均有 $a_{n+1} = a_n + b_n + n$

D. $\frac{b_9}{10} \in \mathbf{N}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 2, 3, 4，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值为_____.

14. 能使“函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减”是真命题的一个正数 ω 的值为_____.

15. $(x^2 - 3x + 2)^5$ 的展开式中 x^2 项的系数为_____.

16. 拿破仑定理是法国著名的军事家拿破仑·波拿马最早提出的一个几何定理：“以任意三角形的三条边为边，向外构造三个等边三角形，则这三个三角形的外接圆圆心恰为另一个等边三角形的顶点”. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ ，以 AB ， BC ， AC 为边向外作三个等边三角形，其外接圆圆心依次为 O_1 ， O_2 ， O_3 ，若 $\triangle O_1O_2O_3$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为_____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 ① $\sqrt{3}b \cdot \sin C = c \cdot \cos B + c$ ，② $\cos^2 \frac{A-C}{2} - \cos A \cos C = \frac{3}{4}$ ，

③ $b \cdot \sin A = a \cdot \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$ 三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足_____.

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $b = \sqrt{14}$ ， $a + c = 4\sqrt{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 = 2$ ， $S_{n+1} = 2a_{n+1}$.

(1) 求 S_n ；

(2) 求满足 $S_n > n^2$ ($n \geq 2$) 的最小整数 n .

19. (12分)

2021 淮安西游乐园淮安马拉松将于4月18日在江苏淮安举行.本次比赛是淮安举办的首个全程马拉松比赛，是“奔跑中国”马拉松系列赛的重要一站，是一次纪念建党100周年的伟人故里行、体验千秋淮扬文脉的运河文化行、品味江淮旖旎风光的绿色高地行、感受淮安和合南北之便的枢纽新城行.为了调查学生喜欢跑步是否与性别有关，某高中选取了200名学生进行了问卷调查，得到如下的 2×2 列联表：

	喜欢跑步	不喜欢跑步	合计
男生	80		
女生		20	
合计			

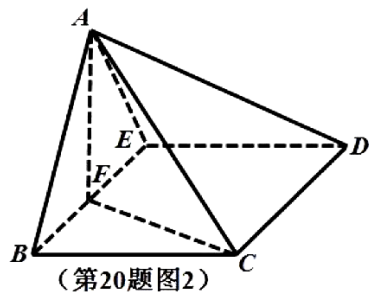
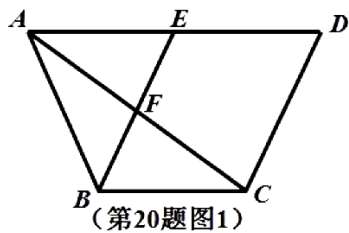
已知在这 200 名学生中随机抽取 1 人抽到喜欢跑步的概率为 0.6 .

- (1) 判断是否有 90% 的把握认为喜欢跑步与性别有关 ?
- (2) 从上述不喜欢跑步的学生中用分层抽样的方法抽取 8 名学生 , 再在这 8 人中抽取 3 人调查其喜欢的运动 , 用 X 表示 3 人中女生的人数 , 求 X 的分布列及数学期望 .

参考公式及数据：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	0.46	0.71	1.32	2.07	2.71	3.84	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12 分)
- 如图 1 所示 , 梯形 $ABCD$ 中 , $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 4$, E 为 AD 的中点 , 连结 BE , AC 交于 F , 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠 , 使得平面 $ABE \perp$ 平面 $BCDE$ (如图 2) .
- (1) 求证： $AF \perp CD$;
- (2) 求平面 AFC 与平面 ADE 所成的二面角的正弦值 .



21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{2}x$, 右准线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程 ;

(2) 过点 $P(0, -1)$ 的直线 l 分别交双曲线 C 的左、右两支于点 A, B , 交双曲线 C 的两条渐近线于点 D, E (D 在 y 轴左侧).

①是否存在直线 l , 使得 $OA \perp OB$? 若存在 , 求出直线 l 的方程 , 若不存在 , 说明理由 ;

②记 $\triangle ODE$ 和 $\triangle OAB$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sin x + t}{e^x}$ 的导函数为 $f'(x)$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 求实数 t 的取值范围 ;

(2) 当 $t = 2$ 时 , $\forall x \in [0, +\infty)$, $f'(x) + e^{(k-1)x} \geq 0$ 恒成立 , 求实数 k 的取值范围.