

数学

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

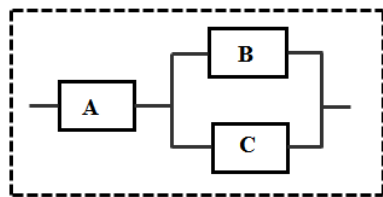
1.设全集为 U ，非空真子集 A, B, C 满足： $A \cap B = B$ ， $A \cup C = A$ ，则

- A. $B \subseteq C$ B. $B \cap C = \emptyset$ C. $A \subseteq \complement_U B$ D. $\complement_U (B \cup C) = \emptyset$

【答案】D

2.如图，某系统使用 A, B, C 三种不同的元件连接而成，每个元件是否正常工作互不影响，当元件 A 正常工作 B, C 中至少有一个正常工作时系统即可正常工作.若元件 A, B, C 正常工作的概率分别为 0.7, 0.9, 0.8，则系统正常工作的概率为

- A. 0.196 B. 0.504 C. 0.686 D. 0.994



【答案】C

3.某产品的宣传费用 x （单位：万元）与销售额 y （单位：万元）的统计数据如表所示：

x	4	5	6	7	8
y	60	80	90	100	120

根据上表可得回归方程 $\hat{y} = 14x + \hat{a}$ ，则宣传费用为 9 万元时，销售额最接近

- A. 123 万元 B. 128 万元 C. 133 万元 D. 138 万元

【答案】C

4.化简 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \alpha\right)$ 可得

- A. $-\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ B. $-\frac{1}{2}\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$
 C. $\frac{1}{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ D. $\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

【答案】D

5.已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ ，设 $a = f(4^{0.4})$ ， $b = f\left(\left(\sqrt[4]{5}\right)^3\right)$ ， $c = f(25^{0.2})$ ，则

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

【答案】C

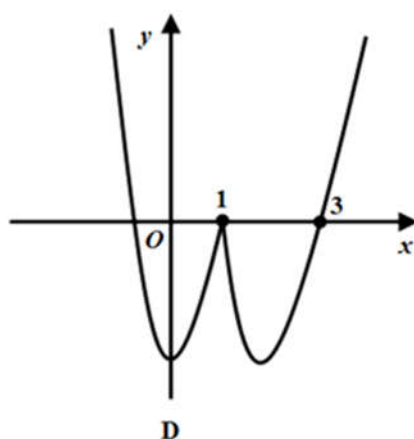
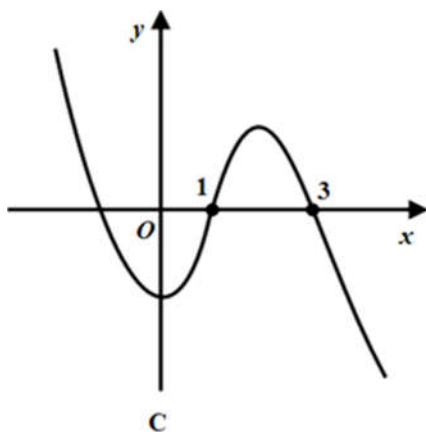
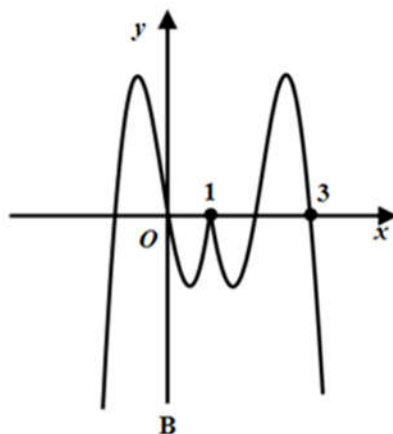
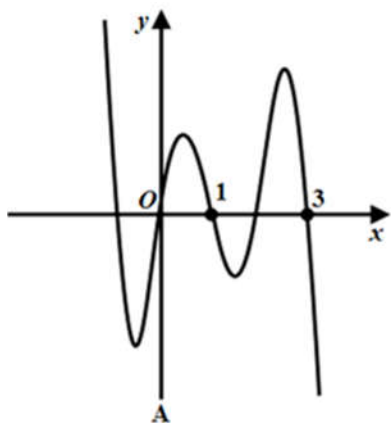
6.某班数学课代表给全班同学们出了一道证明题.甲和丁均说自己不会证明；乙说：丙会证明；丙说：丁会证明.已知四名同学中只有一人会证明此题，且只有一人说了真话.据此可以判定证明此题的人是

A.甲

B.乙

C.丙

D.丁

【答案】A7.函数 $y = 2^{|x-1|} \cdot \sin(\pi x)$ 的图象大致为**【答案】A****【解析】** $f(x) = 2^{|x-1|} \sin(\pi x)$

$$f(2-x) = 2^{|1-x|} \sin(2\pi - \pi x) = 2^{|x-1|} (-\sin \pi x) = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称, 排除 BD

$f(0) = 0$, 排除 C, 选 A.

8. 已知圆 $O_1: x^2 + y^2 + ty - 2 = 0$ 与 y 轴交于 A, B 两点, 点 C 的坐标为 $(1,2)$. 圆 O_2 过 A, B, C 三点, 当实数 t 变化时, 存在一条定直线 l 被圆 O_2 截得的弦长为定值, 则此定直线 l 的方程

为

A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $2x - y = 0$ C. $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$ D. $\sqrt{2}x - y = 0$

【答案】B

【解析】 设圆 $O_2: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

圆 O_2 过 A, B 两点, $\therefore E = t, F = -2$

即此时圆 $O_2: x^2 + y^2 + Dx + ty - 2 = 0$

圆 O_2 过 $C(1, 2)$

$$\therefore D = -2t - 3$$

$$\therefore \text{圆 } O_2: x^2 + y^2 - (2t + 3)x + ty - 2 = 0$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 3x - 2 - t(2x - y) = 0$$

$\therefore$ 定直线 $2x - y = 0$, 选 B.

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 为了解目前淮安市高一学生身体素质状况, 对某校高一学生进行了体能抽测, 得到学生的体育成绩 $X \sim N(70, 100)$, 其中 60 分及以上为及格, 90 分及以上为优秀. 则下列说明正确的是

参 考 数 据 : 随 机 变 量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.6826$,

$$P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.9544, \quad P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.9974.$$

A. 该校学生体育成绩的方差为 10

B. 该校学生体育成绩的期望为 70

C. 该校学生体育成绩的及格率不到 85%

D. 该校学生体育成绩不及格的人数和优秀的人数相当

【答案】BC

10. 设复数 $z = a + bi$ (i 为虚数单位), 则下列说法正确的是

A. 若 $a=0, b=1$, 则 $\sum_{k=1}^{2021} z^k = i$

B. 若 $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $z^2 = \bar{z}$

C. “ $z \in \mathbf{R}$ ” 的充要条件是 “ $z = |z|$ ”

D. 若 $a = \cos \theta, b = \sin \theta (0 < \theta < \pi)$, 则复数 z 在复平面上对应的角在第一或第二象限

【答案】AB

11. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点均在半径为 5 的球面上, $\triangle ABC$ 为等边三角形且外接圆半径为 4, 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $P-ABC$ 的体积可能为

A. 20

B. 40

C. 60

D. 80

【答案】AB

【解析】 设 $\triangle ABC$ 外心为 O' , $\therefore O'C = 4$, 而 $OC = 5$, $\therefore OO' = 3$
 $\because$ 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 设外接球球心为 O , 过 O 作 $OM \perp PQ$ 与点 M

$\therefore P$ 在底面 ABC 上的射影在 AB 上, 设 $PQ = h$, 设

$OM = O'Q = x$

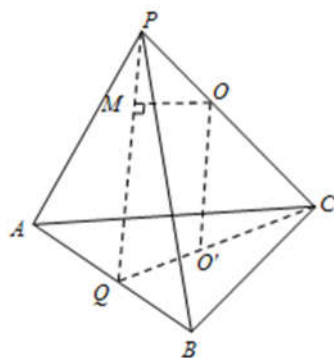
$\therefore PM^2 + OM^2 = 25 \Rightarrow (h-3)^2 + x^2 = 5$

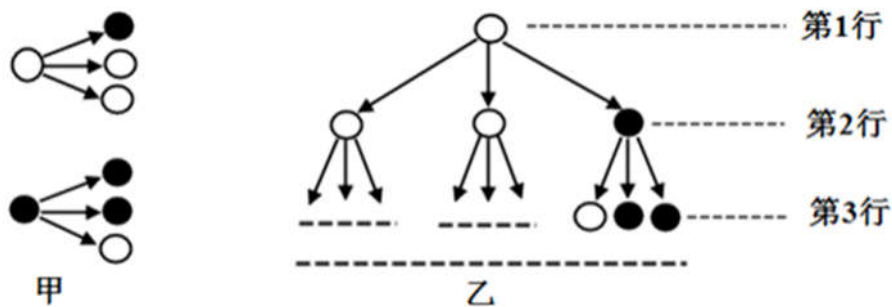
而 $4 \leq x^2 < 25 \Rightarrow 0 < (h-3)^2 \leq 21 \Rightarrow 0 < h \leq 3 + \sqrt{21}$ 且 $h \neq 3$

$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3} \times 6}{2} h = 4\sqrt{3}h \leq 4\sqrt{3}(3 + \sqrt{21}) = 12\sqrt{3} + 12\sqrt{7} < 60$

$\therefore$ 选 AB.

12. 分形几何学是数学家伯努瓦·曼德尔布罗在 20 世纪 70 年代创立的一门新的数学学科, 分形几何学不仅让人们感悟到数学与艺术审美的统一, 而且还有其深刻的科学方法论意义. 按照如图甲所示的分形规律可得如图乙所示的一个树形图:





记图乙中第 n 个白圈的个数为 a_n ，黑圈的个数为 b_n ，则下列结论中正确的有

A. $a_4 = 14$

B. 40 是数列 $\{b_n\}$ 中的项

C. 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，均有 $a_{n+1} = a_n + b_n + n$

D. $\frac{b_9}{10} \in \mathbf{N}$

【答案】 ABD

【解析】 根据图中所示的分形规律，1 个白圈分为 2 个白圈，1 个黑圈分为 1 个白圈，2 个黑圈

记某行白圈 x 个，黑圈 y 个为 (x, y)

第 1 行 $(1, 0)$

第 2 行 $(2, 1)$

第 3 行 $(5, 4)$

第 4 行 $(14, 13)$

$\therefore a_4 = 14$ ，A 对，

$$a_2 - a_1 = 1 = 3^0$$

$$a_3 - a_2 = 3 = 3^1$$

$$a_4 - a_3 = 9 = 3^2$$

$$a_n - a_{n-1} = 3^{n-2}$$

$$\therefore a_n - a_1 = 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^{n-2} = \frac{1-3^{n-1}}{1-3} = \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}, \quad b_n = \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

$n=5$ 时, $b_n=40$, B 对

$$a_{n+1} = \frac{3^n+1}{2}$$

$$a_n + b_n + n = \frac{3^{n-1}+1}{2} + \frac{3^{n-1}-1}{2} + n = 3^{n-1} + n \neq a_{n+1}, \text{ C 错}$$

$$b_9 = \frac{3^8-1}{2} = \frac{9^4-1}{2} = \frac{81^2-1}{2} = 3280, \quad \frac{b_9}{10} = 328 \in \mathbf{N}, \text{ D 对}$$

选 ABD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 2, 3, 4, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{29}{2}$

14. 能使“函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减”是真命题的一个正数 ω 的值为_____.

【答案】 1

15. $(x^2 - 3x + 2)^5$ 的展开式中 x^2 项的系数为_____.

【答案】 800

【解析】 $(x^2 - 3x + 2)^5 = (x-1)^5 (x-2)^5$

$(x-1)^5$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (-1)^r = C_5^r (-1)^r x^{5-r}$

$(x-2)^5$ 展开式第 $k+1$ 项 $T_{k+1} = C_5^k x^{5-k} (-2)^k = C_5^k (-2)^k x^{5-k}$

$$T_{r+1} T_{k+1} = C_5^k C_5^r (-1)^r (-2)^k x^{10-(r+k)}$$

求 x^2 的系数 $r+k=8$

$r=5$ 时, $k=3$, 此时 x^2 系数 $C_5^5 C_5^3 (-1)^5 (-2)^3 = 80$

$r=4$ 时, $k=4$, 此时 x^2 系数 $C_5^4 C_5^4 (-1)^4 (-2)^4 = 400$

$r=3$ 时, $k=5$, 此时 x^2 系数 $C_5^3 C_5^5 (-1)^3 (-2)^5 = 320$

$\therefore x^2$ 系数 800.

16. 拿破仑定理是法国著名的军事家拿破仑·波拿马最早提出的一个几何定理: “以任意三角形的三条边为边, 向外构造三个等边三角形, 则这三个三角形的外接圆圆心恰为另一个等边三角形的顶点”. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 120^\circ$, 以 AB , BC , AC 为边向外作三个等边三角形, 其外接圆圆心依次为 O_1 , O_2 , O_3 , 若 $\triangle O_1 O_2 O_3$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为_____.

【答案】 $[3+2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$

【解析】法一:

建立坐标系, 将几何问题转化为代数问题

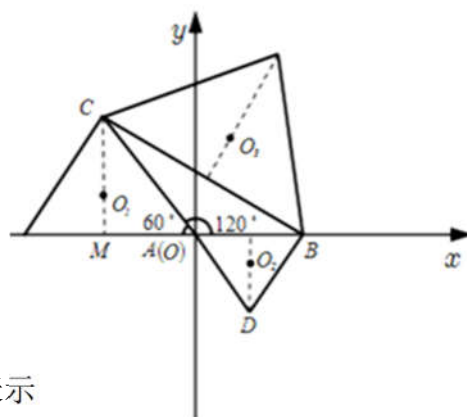
按右图建立坐标系

以 A 为原点, AB 为 x 轴 $\perp AB$ 于 A 的直线为 y 轴

设 $AB = x$, $AC = y$

$\because \angle A = 120^\circ$, $\therefore CA$ 延长出来即为一正三角形的边

求出 $O_1 O_2$ 点坐标, 即能求出正三角形 $O_1 O_2 O_3$ 的面积表示



$$\because \text{都是正三角形}, AC = y, CM = \frac{\sqrt{3}}{2}y, AM = \frac{y}{2}$$

$$\therefore O_1\left(-\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}y\right), \text{同理 } O_2\left(\frac{x}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)$$

$$\therefore |O_1O_2| = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{1}{12}(x+y)^2 = \frac{(x+y)^2}{3}$$

$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} |O_1O_2|^2 = \sqrt{3}$$

$$\text{代入 } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{(x+y)^2}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow (x+y)^2 = 12$$

$$BC = \sqrt{BM^2 + CM^2} = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = \sqrt{(x+y)^2 - xy} = \sqrt{12 - xy}$$

$$C_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = (x+y) + \sqrt{12 - xy}$$

$$\because (x+y)^2 = 12, x > 0, y > 0, \therefore x+y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore C = 2\sqrt{3} + \sqrt{12 - xy}$$

$$(x+y)^2 = 12 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 12, x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$\therefore 4xy \leq 12 \Rightarrow xy \leq 3, \text{当 } x = y = \sqrt{3} \text{ 时取等}$$

$$x > 0, y > 0, \therefore 0 < xy \leq 3$$

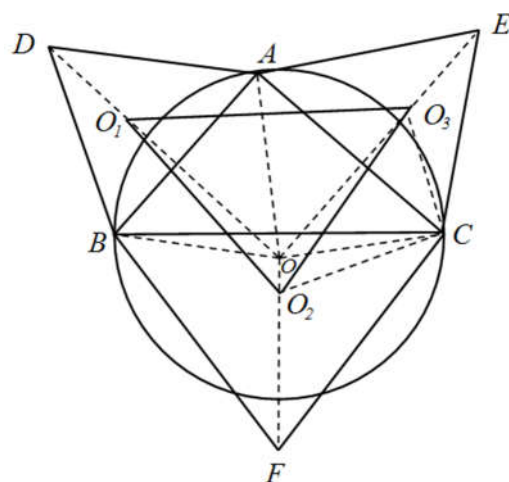
$$\therefore C = 2\sqrt{3} + \sqrt{12 - xy} \in [3 + 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}).$$

法二： $\because \angle A = 120^\circ, \angle O_1AB = \angle O_3AC = 30^\circ$

$$\therefore O_1, A, O_3 \text{ 三点共线}$$

$$\text{设 } AB = c, AC = b, BC = a$$

$$\therefore \Delta O_1O_2O_3 \text{ 的边长为 } \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}b$$



$$\therefore S_{\Delta O_1 O_2 O_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} (b+c)^2 + \sqrt{3} \Rightarrow b+c = 2\sqrt{3}$$

$$\text{而 } b^2 + c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2} = a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc = (b+c)^2 - bc = 12 - bc \in [9, 12)$$

$$\therefore a \in [3, 2\sqrt{3})$$

$$\therefore a+b+c \in [3+2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}).$$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

$$\text{在① } \sqrt{3}b \cdot \sin C = c \cdot \cos B + c, \quad \text{② } \cos^2 \frac{A-C}{2} - \cos A \cos C = \frac{3}{4},$$

$$\text{③ } b \cdot \sin A = a \cdot \sin \left(B + \frac{\pi}{3} \right) \text{ 三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.}$$

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足_____.

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $b = \sqrt{14}$ ， $a+c = 4\sqrt{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】 若选①， $\sqrt{b} \sin C = c \cos B + C$

$$\therefore \sqrt{3} \sin B \sin C = \sin C \cos B + \sin C$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin B - \cos B = 1$$

$$2 \sin \left(B - \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$B \in (0, \pi), \quad B = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 2ac - 2ac \cos B$$

$$14 = 32 - 3ac$$

$$ac = 6$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{若选②} \cos^2 \frac{A-C}{2} - \cos A \cos C = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}(1 + \cos(A-C)) - \cos A \cos C = \frac{3}{4}$$

$$1 + \cos A \cos C + \sin A \sin C - 2 \cos A \cos C = \frac{3}{2}$$

$$\sin A \sin C - \cos A \cos C = \frac{1}{2}$$

$$\text{即} -\cos(A+C) = \frac{1}{2}$$

$$\text{即} \cos B = \frac{1}{2}, \quad B \in (0, \pi), \quad B = \frac{\pi}{3}, \quad \text{下同①}$$

$$\text{若选③} b \sin A = a \sin \left(B + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore \sin B \sin A = \sin A \left(\frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \right)$$

$$\frac{1}{2} \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B$$

$$\tan B = \sqrt{3}, B \in (0, \pi), B = \frac{\pi}{3}, \text{ 下同①.}$$

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 = 2$ ， $S_{n+1} = 2a_{n+1}$ 。

(1) 求 S_n ；

(2) 求满足 $S_n > n^2$ ($n \geq 2$) 的最小整数 n 。

$$\text{【解析】 } S_{n+1} = 2a_{n+1} \text{ ①}$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时 } S_n = 2a_n \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②}$$

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n, \text{ 即 } a_{n+1} = 2a_n$$

$$n=1 \text{ 时, } S_2 = 2a_1 = 4, \therefore a_2 = 2$$

$\therefore \{a_n\}$ 是从第二项起的一个等比数列

$$a_n = \begin{cases} 2, & n=1 \\ 2^{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\therefore n=1 \text{ 时, } S_n = 2$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } S_n = 2 + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2 + \frac{2(1-2^{n-1})}{-1} = 2^n, \text{ } n=1 \text{ 时也成立,}$$

$$\therefore S_n = 2^n.$$

$$(2) \quad n=2 \text{ 时, } S_2 = 4, \quad 2^2 = 4, \text{ 此时 } S_2 = 2^2$$

$n = 3$ 时, $S_3 = 8$, $3^2 = 9$, 此时 $S_3 < 3^2$

$n = 4$ 时, $S_4 = 16$, $4^2 = 16$, 此时 $S_4 = 4^2$

$n = 5$ 时, $S_5 = 32$, $5^2 = 25$, 此时 $S_5 > 5^2$

$n \geq 2$ 时, $\therefore n_{\min} = 5$.

19. (12 分)

2021 淮安西游乐园淮安马拉松将于 4 月 18 日在江苏淮安举行. 本次比赛是淮安举办的首个全程马拉松比赛, 是“奔跑中国”马拉松系列赛的重要一站, 是一次纪念建党 100 周年的伟人故里行、体验千秋淮扬文脉的运河文化行、品味江淮旖旎风光的绿色高地行、感受淮安和合南北之便的枢纽新城行. 为了调查学生喜欢跑步是否与性别有关, 某高中选取了 200 名学生进行了问卷调查, 得到如下的 2×2 列联表:

	喜欢跑步	不喜欢跑步	合计
男生	80		
女生		20	
合计			

已知在这 200 名学生中随机抽取 1 人抽到喜欢跑步的概率为 0.6.

- (1) 判断是否有 90% 的把握认为喜欢跑步与性别有关?
 (2) 从上述不喜欢跑步的学生中用分层抽样的方法抽取 8 名学生, 再在这 8 人中抽取 3 人调查其喜欢的运动, 用 X 表示 3 人中女生的人数, 求 X 的分布列及数学期望.

参考公式及数据: $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	0.46	0.71	1.32	2.07	2.71	3.84	5.024	6.635	7.879	10.828

【解析】 (1) 喜欢跑步的人数 $200 \times 0.6 = 120$

$\therefore 2 \times 2$ 列联表

	喜欢跑步	不喜欢跑步	合计
男生	80	60	140

女生	40	20	60
合计	120	80	200

$$K^2 = \frac{200(80 \times 20 - 60 \times 40)^2}{120 \times 80 \times 140 \times 60} = \frac{100}{63} \approx 1.587 < 2.71$$

没有90%的把握认为喜欢跑步与性别有关.

(2) 不喜欢跑步男生有60人, 女生有20人

现分层抽样8人, 男生抽6人, 女生抽2个

X 可以0,1,2

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{5}{14}$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^2 C_2^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^1 C_2^2}{C_8^3} = \frac{3}{28}$$

$\therefore X$ 的分布列

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

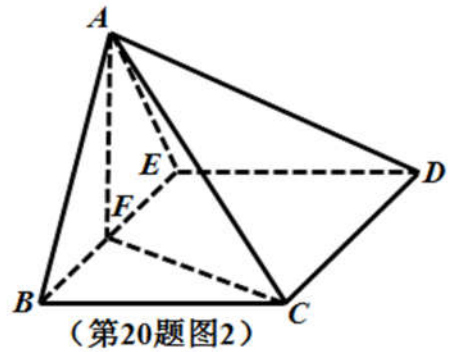
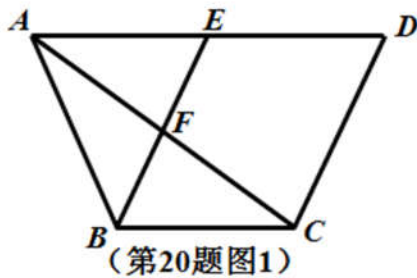
$$E(X) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{3}{4}.$$

20. (12分)

如图1所示, 梯形 $ABCD$ 中, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 4$, E 为 AD 的中点, 连结 BE , AC 交于 F , 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠, 使得平面 $ABE \perp$ 平面 $BCDE$ (如图2).

(1) 求证: $AF \perp CD$;

(2) 求平面 AFC 与平面 ADE 所成的二面角的正弦值.



【解析】(1) 在梯形 $ABCD$ 中, $AD = 2BC$, E 为 AD 中点

$\therefore BC \parallel DE \therefore BCDE$ 为平行四边形

同理 $BC \parallel AE$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CBF$

$\therefore BF = EF, AF = FC$

$\therefore F$ 为 BC 中点

又 $\because AB = AE = 2 \therefore AF \perp BE$

平面 $ABE \perp$ 平面 $BCDE$, 平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABE = BE$, $AF \subset$ 平面 ABE

$\therefore AF \perp$ 平面 $BCDE$

又 $CD \subset$ 平面 $BCDE$

$\therefore AF \perp CD$.

(2) 连结 $CE \because BC \parallel AE \therefore AB = CE = 2$

$\therefore \triangle BCE$ 为正三角形, F 为 AC 中点

$\therefore CF \perp BE$

又 $\because AF \perp$ 平面 $BCDE$, $CF \subset$ 平面 $BCDE$

$\therefore AF \perp CF$

$\therefore FB, FC, FA$ 两两垂直

以 F 为坐标原点分别以 FB, FC, FA 为 x, y, z 轴建系

$$B(1, 0, 0), E(-1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), A(0, 0, \sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB} = (1, -\sqrt{3}, 0)$$

$BF \perp$ 平面 AFC

$\therefore \vec{n}_1 = (1, 0, 0)$ 是平面 AFC 的一个法向量

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} -x - \sqrt{3}z = 0 \\ x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

不妨设 $y = 1$, 则 $x = \sqrt{3}$, $z = -1$, $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$

设平面 AFC 与平面 ADE 所成的二面角为 α

$$\cos \alpha = \left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{1 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{2}x$, 右准线方程为

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 过点 $P(0, -1)$ 的直线 l 分别交双曲线 C 的左、右两支于点 A, B , 交双曲线 C 的两条渐近线于点 D, E (D 在 y 轴左侧).

① 是否存在直线 l , 使得 $OA \perp OB$? 若存在, 求出直线 l 的方程, 若不存在, 说明理由;

② 记 $\triangle ODE$ 和 $\triangle OAB$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

【解析】(1)
$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \sqrt{2} \\ \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a^2 = c^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2} \\ c = \sqrt{3} \end{cases}, \therefore \text{双曲线 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) ① 设 $l: y = kx - 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{消 } y \text{ 可得 } (2 - k^2)x^2 + 2kx - 3 = 0$$

直线 l 分别交双曲线左右两支于 A, B 两点

$$\begin{cases} 2 - k^2 \neq 0 \\ \Delta = 8(3 - k^2) > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{2k}{2 - k^2}, \text{ 则 } -\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \\ x_1 x_2 = -\frac{3}{2 - k^2} < 0 \end{cases}$$

若 $OA \perp OB$, 则 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

即 $(1 + k^2)x_1 x_2 - k(x_1 + x_2) + 1 = 0$, 无解, $\therefore$ 不存在这样的直线 l .

② $\triangle ODE$ 以 O 为顶点, 高为 h , 底为 DE
 $\triangle OAB$ 以 O 为顶点, 高为 h , 底为 AB

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot DE}{\frac{1}{2}h \cdot AB} = \frac{DE}{AB},$$

$$\text{由 (1) 知 } AB = \sqrt{k^2 + 1} |x_1 - x_2| = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{2k}{k^2 - 2}\right)^2 - 4 \frac{3}{k^2 - 2}} = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{\frac{8(3 - k^2)}{2 - k^2}}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ y = \sqrt{2}x \end{cases}, \text{ 解得 } x_D = \frac{1}{k - \sqrt{2}}, \text{ 同理 } x_E = \frac{1}{k + \sqrt{2}}$$

$$DE = \sqrt{1 + k^2} \left| \frac{1}{k - \sqrt{2}} - \frac{1}{k + \sqrt{2}} \right| = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2 + 1}}{2 - k^2}$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3 - k^2}}$$

$$\therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{DE}{AB} < 1$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{S_1}{S_2} < 1.$$

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sin x + t}{e^x}$ 的导函数为 $f'(x)$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 求实数 t 的取值范围;

(2) 当 $t = 2$ 时, $\forall x \in [0, +\infty)$, $f'(x) + e^{(k-1)x} \geq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【解析】法一: (1) $f(x) = \frac{\sin x + t}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot e^x - e^x \cdot (\sin x + t)}{(e^x)^2} = \frac{\cos x - \sin x - t}{e^x}$

$$f'(x) = 0 \text{ 有解} \Rightarrow t = \cos x - \sin x \text{ 有解}$$

$$\text{而有辅助角公式: } t = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2} \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

故 $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 时, $f'(x) = 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解.

$$(2) \text{ 由 (1) } f'(x) + e^{(k-1)x} = \frac{\cos x - \sin x - t}{e^x} + \frac{e^{kx}}{e^x} \geq 0$$

注意到 $e^x \geq 0$, 所以 $\cos x - \sin x - t + e^{kx} \geq 0 (t = 2)$

即证明: $g(x) = e^{kx} + \cos x - \sin x \geq 2$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立.

$$g(0) = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$g'(x) = ke^{kx} - \sin x - \cos x$$

若: $k < 1 \Rightarrow g'(0) = k - 1 < 0$, (取 $x_1 = \frac{1}{k} + \ln \frac{k+3+|k|}{k}$,

$$g'(x_1) = k \cdot e^{\ln \frac{k+3+|k|}{k}} - \sin x_1 - \cos x_1 = k + 3 - \sin x_1 - \cos x_1$$

$$\geq k + 3 - 1 - 1 = k + 1 + |k| \geq 1 > 0 + |k|)$$

$\therefore \exists (0, \varepsilon)$, $g'(x)$ 在 $(0, \varepsilon)$ 上小于 0 $\Rightarrow g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < g(0) = 2$ 矛盾!

从而 $k \geq 1$, 而我们显然有 e^{kx} 在 $(1, +\infty)$ 上关于 k 单增

即: $e^{kx} \geq e^x (k \geq 1)$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 成立.

$$\therefore g(x) = e^{kx} - \sin x - \cos x \geq e^x - \sin x - \cos x = g_1(x)$$

$$g_1'(x) = e^x - \cos x + \sin x = e^x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right), \quad g_1'(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ 上单增,}$$

$$\therefore g_1'(x) \geq g_1'(0) = 0$$

$$\therefore g_1(x) \geq g_1(0) = 2, \text{ 在 } \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ 上成立, 而 } x > \frac{3\pi}{4} \text{ 时, } e^{\frac{3\pi}{4}} > e^2 > 2^2 = 4$$

$$\therefore g_1(x) \geq e^2 - 1 - 1 > 4 - 2 = 2, \therefore g(x) \geq g_1(x) \geq 2$$

在 $k \geq 1$ 时成立.

法二: (1) $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x - t}{e^x}$

由题知 $\cos x_0 - \sin x_0 - t = 0$ 有解, 而 $t = \cos x_0 - \sin x_0$

$$\text{而 } \cos x_0 - \sin x_0 = \sqrt{2} \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \text{ 故 } t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$(2) \text{ 当 } t=2 \text{ 时, } f'(x) = \frac{\cos x - \sin x - 2}{e^x}$$

$$\text{即 } \frac{\cos x - \sin x - 2}{e^x} + e^{(k-1)x} \geq 0$$

$$\text{整理有 } \frac{\cos x - \sin x - 2}{e^{kx}} + 1 \geq 0$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\cos x - \sin x - 2}{e^{kx}} + 1$$

$$g'(x) = \frac{-\sin x - \cos x - k(\cos x - \sin x - 2)}{e^{kx}}$$

$$\text{当 } k \geq 1 \text{ 时, } g'(x) \geq \frac{-\sin x - \cos x - (\cos x - \sin x - 2)}{e^{kx}} = \frac{2 - 2\cos x}{e^{kx}} \geq 0$$

$g(x)$ 单调递增, $g(x) \geq g(0) = 0$, 符合题意

当 $0 < k < 1$ 时, $g'(0) = k - 1 < 0$, $\exists x_0 > 0$, 使 $0 < x < x_0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$g(x) < g(0) = 0$, 不符合题意

当 $k \leq 0$ 时, $g(\pi) < 0$, 不符合题意

故 $k \in [1, +\infty)$