

2021 届新高考基地学校高三第二次大联考

数学试卷

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集为 $\mathbf{R}$,集合 $A = \{x|2 < x < 5\}$, $B = \{x|2^x > 16\}$,则 $A \cap (C_{\mathbf{R}}B) =$
A. $\{x|4 < x \leq 5\}$ B. $\{x|4 < x < 5\}$ C. $\{x|2 < x \leq 4\}$ D. $\{x|2 < x < 4\}$
2. 某校组建了甲、乙、丙 3 支羽毛球球队参加男女混合双打比赛,其中男队员有小王、小张、小李,女队员有小红、小芳、小丽.若小王和小红不是搭档,小张和小丽不是搭档,小李和小芳不是搭档,则
A. 小王的搭档一定是小芳 B. 小芳的搭档不可能是小张
C. 小张的搭档不可能是小红 D. 小李的搭档可能是小丽
3. 根据 2010~2019 年我国 16~59 岁人口比重统计数据 $y(\%)$,拟合了 y 与年份 x 的回归方程为 $\hat{y} = -0.74x + 1551$,试据此估计我国约从哪一年开始 16~59 岁人口比重低于 50%

- A. 2023 B. 2026 C. 2029 D. 2032

4. 碌碡是我国古代人民发明的一种把米、麦、豆等粮食加工成粉末的器具.如图,近似圆柱形碌碡的轴固定在经过圆盘圆心且垂直于圆盘的木桩上,当人推动木柄时,碌碡在圆盘上滚动.若人推动木柄绕圆盘转动 1 周,碌碡恰好滚动了 3 圈,则该圆柱形碌碡的高与其底面圆的直径之比约为

- A. 3:1 B. 3:2 C. 1:3 D. 2:3



5. 若存在复数 z 同时满足 $|z - i| = 1$, $|z - 3 + 3i| = t$,则实数 t 的取值范围是
A. $[0, 4]$ B. $(4, 6)$ C. $[4, 6]$ D. $(6, +\infty)$
6. 香农定理是所有通信制式最基本的原理,它可以用香农公式 $C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$ 来表示,其中 C 是信道支持的最大速度或者叫信道容量, B 是信道的带宽 (Hz), S 是平均信号功率 (W), N 是平均噪声功率 (W).已知平均信号功率为 $1000W$,平均噪声功率为 $10W$,在不改变平均信号功率和信道带宽的前提下,要使信道容量增大到原来的 2 倍,则平均噪声功率约降为

- A. $0.1W$ B. $1.0W$ C. $3.2W$ D. $5.0W$

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2c (c > 0)$,右焦点为 F ,过 C 上一点 P 作直线 $x = \frac{3}{2}c$ 的垂线,垂足为 Q .若四边形 $OPQF$ 为菱形,则 C 的离心率为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $4 - 2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3} - 1$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x-a}{e^x}$,且 $e^a = \ln b = c$,则

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(b) < f(c) < f(a)$
C. $f(a) < f(c) < f(b)$ D. $f(c) < f(b) < f(a)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 > 0, d < 0$, 则

- A. 数列 $\{a_n\}$ 单调递减
B. 数列 $\{a_n\}$ 没有最小值
C. 数列 $\{S_n\}$ 单调递减
D. 数列 $\{S_n\}$ 有最大值

10. 已知 a, b 均为正数, 且 $a - b = 1$, 则

- A. $2^a - 2^b > 1$
B. $a^3 - b^3 < 1$
C. $\frac{4}{a} - \frac{1}{b} \leq 1$
D. $2\log_2 a - \log_2 b < 2$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2 + 1}$, $x \in (-\pi, \pi)$, 则

- A. $\forall x \in (-\pi, \pi), f(x)f(-x) \geq 0$
B. $\forall x \in (-\pi, \pi), |f(x)| \leq 1$
C. $\exists x_1, x_2 \in (-\pi, \pi), x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$
D. $\exists x_0 \in (-\pi, \pi), \forall x \in (-\pi, \pi), |f(x)| \leq f(x_0)$

12. 由倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, 可知 $\cos 2x$ 可以表示为 $\cos x$ 的二次多项式. 一般地, 存在一个 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 次多项式 $P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R})$, 使得 $\cos nx = P_n(\cos x)$, 这些多项式 $P_n(t)$ 称为切比雪夫 (P.L. Tschhebycheff) 多项式. 则

- A. $P_3(t) = 4t^3 - 3t$
B. 当 $n \geq 3$ 时, $a_0 = 0$
C. $|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leq 2$
D. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若志愿者服务大队计划在今年“五一”小长假这 5 天中安排 3 天到社区进行劳动法宣讲, 则这 3 天中恰有 2 天连排的概率为_____.

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 当点 P 满足_____时, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

(注: 填上你认为正确的一种条件即可, 不必考虑所有可能的情况)

15. 设 $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = \sum_{i=0}^{14} a_i x^{7-i}$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}) =$ _____.

16. 已知等边三角形 ABC 的边长为 2, 点 D, E 分别在边 AC, BC 上, 且 $DE \parallel AB$, 将 $\triangle CDE$ 沿 DE 折起, 则四棱锥 $C - DABE$ 的体积的最大值为_____, 此时四棱锥 $C - DABE$ 的外接球的表面积为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在① $4a \sin B \cos A = \sqrt{3}b$, ② $b \sin^2 B + c \sin^2 C = (b + c) \sin^2 A$, ③ $\sqrt{3} \sin A + \cos A = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$.

这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求出 $\cos B$ 的值;

若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos C = \frac{1}{3}$, _____.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12分)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $(n+2)a_n = 3(n+1)a_{n+1}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,求证: $S_n < \frac{15}{4}$.

19. (12分)阳澄湖大闸蟹又名金爪蟹,产于江苏苏州.蟹身青壳白肚,体大膘肥,肉质膏腻,营养丰富,深受消费者喜爱.某水产品超市购进一批重量为 100 千克的阳澄湖大闸蟹,随机抽取了 50 只统计其重量,得到的结果如下表所示:

规格	中蟹		大蟹		小蟹	
重量 (单位:克)	[160,180)	[180,200)	[200,220)	[220,240)	[240,260)	[260,280]
数量 (单位:只)	3	2	15	20	7	3

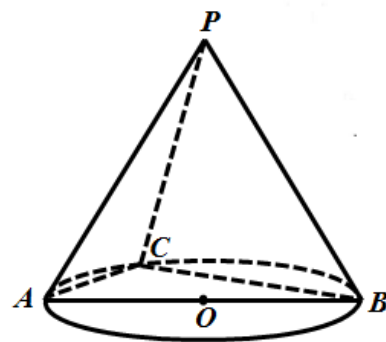
(1)试用组中值来估计该批大闸蟹约有多少只? (所得结果四舍五入保留整数);

(2)某顾客从抽取的 10 只特大蟹中随机购买了 4 只,记重量在区间 $[260,280]$ 上的大闸蟹数量为 X ,求 X 的概率分布和数学期望.

20. (12分)已知 AB 是圆 O 的直径,且长为 4, C 是圆 O 上异于 A, B 的一点,点 P 到 A, B, C 的距离均为 $2\sqrt{3}$. 设二面角 $P-AC-B$ 与二面角 $P-BC-A$ 的大小分别为 α, β .

(1)求 $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\tan^2 \beta}$ 的值;

(2)若 $\tan \beta = \sqrt{3} \tan \alpha$, 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



21. (12分)在平面直角坐标系 xOy 中,过点 $M(0, -1)$ 的直线交抛物线 $y^2 = 4x$ 于 A, B 两点.

(1)设 OA, OB 的斜率分别为 k_1, k_2 ,求 $k_1 + k_2$ 的值;

(2)过点 A, B 分别作直线 $x = -4$ 的垂线,垂足为 C, D ,试探究 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 的关系,并说明理由.

22. (12分)已知函数 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x + 3\log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 为单调减函数, $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值不小于 0.

(1)求 a 的值;

(2)若 $f(x_1) + f(x_2) = 9$, 求证: $x_1 + x_2 \geq 2$.