

扬州市 2021 届高三考前调研测试试题

数学

2021.05

注意事项:

1. 本试卷考试时间为 120 分钟, 试卷满分 150 分, 考试形式闭卷.
2. 本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置, 否则不给分.
3. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号等信息用黑色墨水签字笔填写在答题卡的相应位置.

一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的选项中, 只有一项符合要求).

1. 设全集 $U = \{x | y = \lg(2x - x^2)\}$, 集合 $A = \{y | y = 2^x, x < 0\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
A. $[1, +\infty)$ B. $(0, 1]$ C. $[1, 2]$ D. $(-\infty, 1]$
2. 若 $(3+i)(2+xi) = y$, 其中 $x, y \in R, i$ 为虚数单位, 则复数 $x+yi$ 在复平面内对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, AC = 8, BC = 10, \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DB}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()
A. -86 B. 86 C. 7 D. -7
4. 现有《诗经》、《尚书》、《礼记》、《周易》、《春秋》各一本, 分给甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学, 每人一本, 若甲乙都没有拿到《诗经》, 且乙也没拿到《春秋》, 则所有可能的分配方案有 ()
A. 18 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 54 种
5. 密位制是度量角的一种方法. 将周角等分为 6000 份, 每一份叫做 1 密位的角. 以密位作为角的度量单位, 这种度量角的单位制, 叫做角的密位制. 在角的密位制中, 采用四个数码表示角的大小, 单位名称密位二字可以省去不写. 密位的写法是在百位数字与十位数字之间画一条短线, 如: 478 密位写成“4-78”, 1 周角等于 6000 密位, 记作 1 周角 = 60-00. 如果一个扇形的半径为 2, 面积为 $\frac{7}{3}\pi$, 则其圆心角可以用密位制表示为 ()
A. 25-00 B. 35-00 C. 42-00 D. 70-00
6. “五一”期间, 甲、乙、丙三个大学生外出旅游, 已知一人去北京, 一人去西安, 一人去云南. 回来后, 三人对去向作了如下陈述:
甲: “我去了北京, 乙去了西安.”
乙: “甲去了西安, 丙去了北京.”
丙: “甲去了云南, 乙去了北京.”
事实是甲、乙、丙三人的陈述都只对了一半 (关于去向的地点仅对一个). 根据以上信息, 可判断下面说法中正确的是 ()
A. 甲去了西安 B. 乙去了北京 C. 丙去了西安 D. 甲去了云南

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 以 F 为圆心, $|OF|$ 为半径的圆交双曲线 C 的右支于 P, Q 两点 (O 为坐标原点), 若 $\triangle OPQ$ 是等边三角形, 则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. 2

8. 已知定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且满足 $f(2) = 2$, 则关于 x 的不等式 $f(x) < \sin \pi x + x$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知 $ab > 0$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则下列不等式一定成立的有 ()

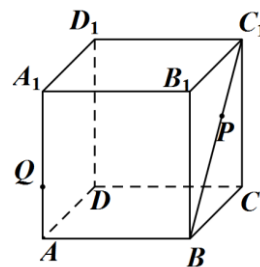
A. $a < b$ B. $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$ C. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ D. $2^a + a < 2^b + b$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上恰能取到 2 次最大值, 且最多有 4 个零点, 则下列说法中正确的有 ()

A. $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰能取到 2 次最小值 B. ω 的取值范围为 $[\frac{8}{3}, \frac{25}{6})$
C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上一定有极值 D. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上不单调

11. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2$, 点 P 在线段 BC_1 上运动, 点 Q 在线段 AA_1 上运动, 则下列说法中正确的有 ()

A. 三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积为定值
B. 线段 PQ 长度的最小值为 2
C. 当 P 为 BC_1 中点时, 三棱锥 $P-ABB_1$ 的外接球表面积为 2π
D. 平面 BPQ 截该正方体所得截面可能为三角形、四边形、五边形



12. 在三角函数部分, 我们研究过二倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, 实际上类似的还有三倍角公式, 则下列说法中正确的有 ()

A. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

B. 存在 $|x| \leq 1$ 时, 使得 $|4x^3 - 3x| > 1$

C. 给定正整数 n , 若 $|x_i| \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$, 则 $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \frac{n}{3}$

D. 设方程 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 的三个实数根为 x_1, x_2, x_3 , 并且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $2(x_3^2 - x_2^2) = x_3 - x_1$

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中常数项为_____ (用数字作答) .

14. 已知点 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 点 Q 在圆 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ 上, 则 PQ 长度的最小值为_____

15. 根据天文学有关知识, 当且仅当一颗恒星的“赤纬”数值大于 -58° 时, 能在扬州的夜空中看到它. 下表列出了 10 颗恒星的“赤纬”数值:

星名	天狼星	老人星	南门二	大角星	织女一	五车二	参宿七	南河三	水委一	参宿四
赤纬	-16.7°	-52.7°	-60.8°	19.2°	38.8°	46°	-8.2°	5.2°	-57.2°	7.4°

现有四名同学从这 10 颗恒星中各随机选择 1 颗进行观测, 其中有 X 人能在扬州的夜空中看到观测目标, 则 X 的数学期望为_____

16. 对于有限数列 $\{a_n\}$, 定义集合 $S(k) = \left\{ s \mid s = \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}}{k}, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 10 \right\}$, 其中

$k \in \mathbb{Z}$ 且 $1 \leq k \leq 10$, 若 $a_n = n$, 则 $S(3)$ 的所有元素之和为_____

四、解答题 (本大题共 6 小题, 计 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = b_1 = 2$, 且 $a_2 - 1, a_3, a_6 - 1$ 是等比数列 $\{b_n\}$ 的连续三项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = (-1)^n \log_2(a_n a_{n+1}) + \log_2 b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 10 项和 T_{10} .

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 现有下列四个条件:

① $a = \sqrt{3}$; ② $b = 2$; ③ $2c \cos A = a \cos B + b \cos A$; ④ $3(a^2 + c^2 - b^2) = -2\sqrt{3}ac$.

(1) ③④两个条件可以同时成立吗? 请说明理由;

(2) 请从上述四个条件中选三个, 使得 $\triangle ABC$ 有解, 并求 $\triangle ABC$ 的面积.

(注: 如果选择多个组合作为条件分别解答, 按第一个解答计分)

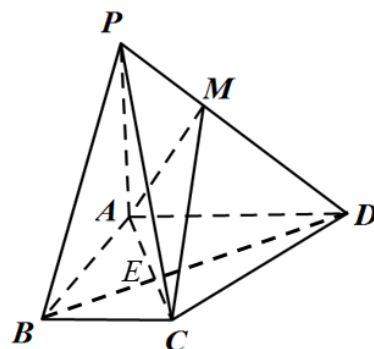
19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$,

$AB = AD = 2, AC = \sqrt{3}, AC \cap BD = E, \overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{MP}, PB \parallel$ 平面 MAC .

(1) 证明: $AC \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 PB 与平面 $ABCD$ 所成角为 45° , 求二面角 $C-PD-A$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 为椭圆 C 上一点, 线段 MF_1 与

圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切于该线段的中点 N , 且 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 椭圆 C 上是否存在三个点 A, B, P , 使得直线 AB 过椭圆 C 的左焦点 F_1 , 且四边形 $OAPB$ 是平行四边形? 若存在, 求出直线 AB 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

甲、乙两所学校之间进行排球比赛, 采用五局三胜制(先赢 3 局的学校获胜, 比赛结束), 约定比赛规则如下: 先进行男生排球比赛, 共比赛两局, 后进行女生排球比赛. 按照以往比赛经验, 在男生排球比赛中,

每局甲校获胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙校获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 在女生排球比赛中, 每局甲校获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 乙校获

胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 每局比赛结果相互独立.

(1) 求甲校以 3:1 获胜的概率;

(2) 记比赛结束时女生比赛的局数为 ξ , 求 ξ 的概率分布.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax$.

(1) 若 $f(x)$ 存在极值, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a = 1$ 时, 判断函数 $g(x) = f(x) + 2\sin x$ 的零点个数, 并证明你的结论.