

2020—2021 学年度第二学期期初调研测试试题

高三数学

2021.02

(全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

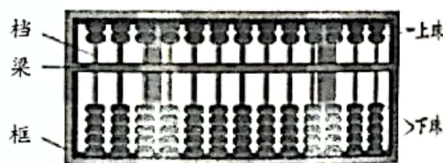
一、单项选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的选项中, 只有一项符合要求).

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4 < 0\}$, $B = \{x | \log_3 x < 1\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 A. $(-2, 3)$ B. $(-2, 2)$ C. $(0, 3)$ D. $(0, 2)$

2. 已知复数 $z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z| = (\quad)$
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, \vec{b} = (1, 1), \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = (\quad)$
 A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 如图, 我国古代算盘每个档(挂珠的杆)上有 7 颗算珠, 用梁隔开, 梁上面 2 颗叫上珠, 上珠每颗代表数值 5, 下面 5 颗叫下珠, 下珠每颗代表数值 1, 现从某一档的 7 颗算珠中任取 4 颗(这 4 颗算珠最小表示数值 4, 最大表示数值 12), 则所取的算珠表示的数值是 8 的概率为 $(\quad)$



- A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{2}{7}$
5. 已知点 F 是抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, O 为坐标原点, 若以 F 为圆心, $|FO|$ 为半径的圆与直线 $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$ 相切, 则抛物线的准线方程为 $(\quad)$
 A. $y = -1$ B. $y = -2$ C. $x = -1$ D. $x = -2$
6. 我国古代数学家提出的“中国剩余定理”又称“孙子定理”, 它是世界数学史上光辉的一页, 定理涉及的是整除问题. 现有这样一个整除问题: 将 2 到 2021 这 2020 个整数中被 3 除余 1 且被 5 除余 1 的数、按从小到大的顺序排成一系列构成数列 $\{a_n\}$, 那么此数列的项数为 $(\quad)$

- A. 133 B. 134 C. 135 D. 136
7. 已知 $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 且 $\alpha^3 - \cos \alpha - \lambda = 0$, $\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)^3 - 2\sin \beta \cos \beta - \lambda = 0$, 若 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\tan \beta = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3



8. 十八世纪早期, 英国数学家泰勒发现了公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

(其中 $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, $0! = 1$). 现用上述公式求

$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-2)!} + \cdots$ 的值, 下列选项中与该值最接近的是 ()

- A. $\sin 30^\circ$ B. $\sin 33^\circ$ C. $\sin 36^\circ$ D. $\sin 39^\circ$

二、多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 在 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中, 下列说法中正确的有 ()

- A. 所有项的二项式系数和为 128 B. 所有项的系数和为 0
C. 系数最大的项为第 4 项和第 5 项 D. 存在常数项

10. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $2x + y = 2$, 则下列说法中正确的有 ()

- A. xy 的最大值为 $\frac{1}{2}$ B. $4x^2 + y^2$ 的最大值为 2
C. $4^x + 2^y$ 的最小值为 4 D. $\frac{2}{x} + \frac{x}{y}$ 的最小值为 4

11. 已知函数 $f(x) = |\sin x| + \sqrt{3}|\cos x|$, 则下列说法中正确的有 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, 2]$
B. 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
C. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π
D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{9\pi}{10}, \frac{10\pi}{9}\right]$ 上是增函数

12. 我们把所有棱长都相等的正棱柱 (锥) 叫 “等长正棱柱 (锥)”, 而与其所有棱都相切的球称为棱切球, 设下列 “等长正棱柱 (锥)” 的棱长都为 1, 则下列说法中正确的有 ()

- A. 正方体的棱切球的半径为 $\sqrt{2}$
B. 正四面体的棱切球的表面积为 $\frac{\pi}{2}$
C. 等长正六棱柱的棱切球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$
D. 等长正四棱锥的棱切球被棱锥 5 个面 (侧面和底面) 截得的截面面积之和为 $\frac{7\pi}{12}$



三、填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 已知一个圆锥的侧面积为 6π , 它的侧面展开图是一个半圆, 则此圆锥的体积为_____.
14. 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $P(X > 0) + P(X \geq -2) = 1$, 则 $\mu =$ _____.
15. 一颗彗星的运行轨迹是以太阳为焦点, 且靠近该焦点的双曲线的一支, 当太阳与这颗彗星的距离分别是6 (亿千米) 和3 (亿千米) 的时候, 这颗彗星与太阳的连线所在直线与双曲线的实轴所在直线夹角分别为 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{3}$, 则这颗彗星与太阳的最近距离是_____ (亿千米).
16. 已知函数 $y = kx + b$ 与函数 $y = e^{x-1} - e^{1-x}$ 的图象交于 A, B, C , 且 $|AB| = |BC| = \sqrt{e^2 + \frac{1}{e^2} - 1}$, 则实数 $k =$ _____.

四、解答题 (本大题共6小题, 计70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分10分)

已知平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $AB = \sqrt{3} + 1$, $BD = \sqrt{7}$.

- (1) 求 BC 的长;
(2) 求 $\triangle BCD$ 的面积.

18. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, _____.

条件①: $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$; 条件②: $S_n + 1 = a_{n+1}$

请在上面的两个条件中任选一个, 补充在上面的横线上, 完成下列两问的解答:

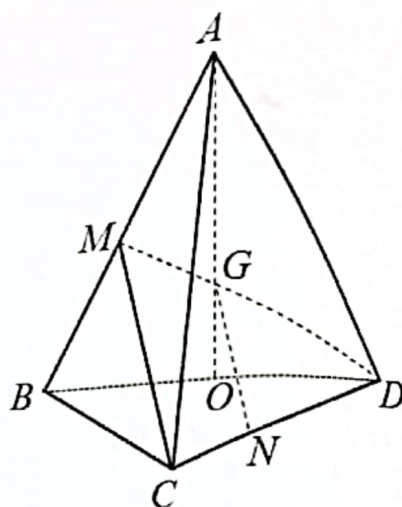
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = \log_2 a_{2n} + 1$, 记数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.



19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 都为等边三角形, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , M, O 分别为 AB, BD 的中点, $AO \cap DM = G$, N 在棱 CD 上且满足 $2CN = ND$, 连接 MC, GN .



(1) 证明: $GN \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求直线 AC 和平面 GND 所成角的正弦值.

20. (本小题满分 12 分)

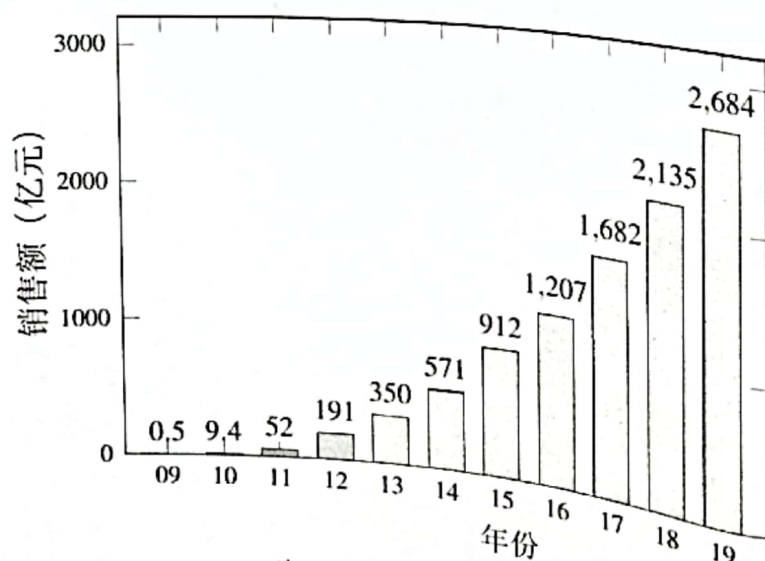
某研究性学习小组收集了某网络销售平台近五年“双十一”当天成交额的数据, 并制成如下表格:

年份 x	2015	2016	2017	2018	2019
成交额 y (百亿元)	9	12	17	21	27

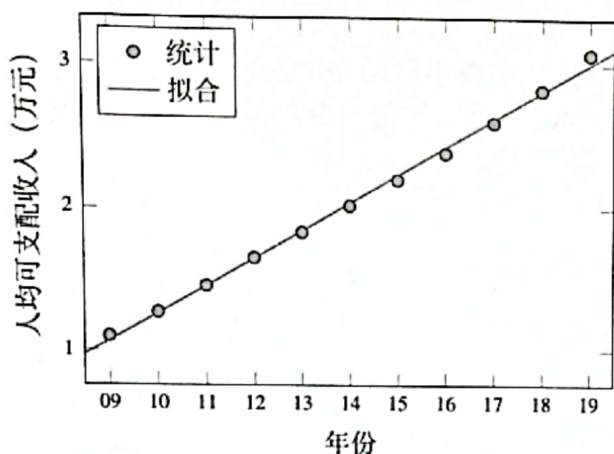
(1) 小组成员小明准备用线性模型 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 刻画 y 与 x 的关系, 请帮助小明求出线性回归方程;

参考公式: 线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中的 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

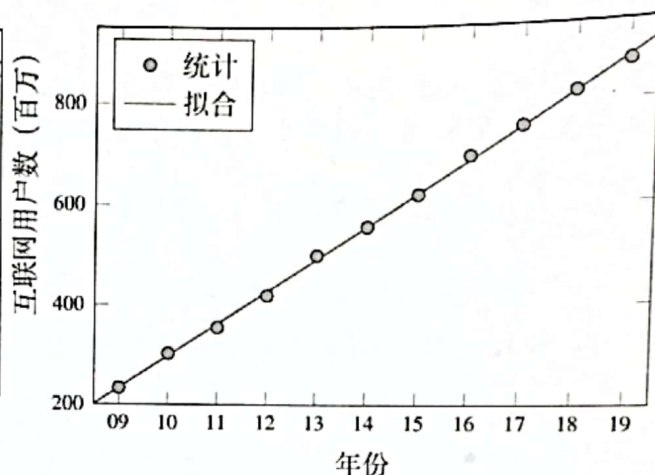
(2) 小组成员小王收集了更多的数据信息, 借助计算机整理得到下图:



小王提出, 从上图来看, 刻画 y 与 x 的关系选用线性模型明显不合理, 而二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in R, a \neq 0$) 模型或指数函数 $y = a \cdot b^x + c$ ($a, b, c \in R, b > 0, b \neq 1$) 模型均有可能. 已知中国人均可支配收入 y_1 与中国互联网用户人均该平台消费额 y_2 呈正线性相关, 请你依据以下图表中的信息, 帮助小王选择一个合理的函数模型, 并简要说明理由 (不要求出 a, b, c).



中国人均可支配收入与年份关系图



中国互联网用户数与年份关系图

- (3) “双十一”活动中, 顾客可以享受优惠; 也可能会冲动消费, 导致所购物品闲置 (闲置物品全部在某二手平台上以原标价的 50% 售出). 某商户对标价为 100 元的某种商品采取了 3 种销售形式促销: 普通购物, 秒杀购物, 直播购物. 该小组收集了相关信息整理得下表:

	普通购物	秒杀购物	直播购物
销售量占比	70%	10%	20%
折扣率	5%	20%	15%
所购物品闲置率	20%	40%	30%

用频率估计概率, 从数学期望的角度, 判断顾客购买该商品是否划算?

注: 折扣率 = $\frac{\text{标价} - \text{售价}}{\text{标价}} \times 100\%$; 所购物品闲置率 = $\frac{\text{所购物品闲置总数}}{\text{所购物品购买总数}} \times 100\%$



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + mx + m^2)$, $g(x) = ax^2 + x + ax \ln x$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极小值, 求实数 m 的值;
- (2) 设 $m = 0$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线方程为 $x = 2\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设 $P(0, 1)$, A 、 B 为椭圆的左右顶点, 过 A 作斜率为 k_1 的直线交椭圆于 E , 连接 EP 并延长交椭圆于 F , 记直线 BF 的斜率为 k_2 , 若 $k_1 = 3k_2$, 求直线 EF 的方程.

