

2022 届高三年级第二次线上联考

数学试题参考答案与评分标准

一、选择题

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. A | 2. C | 3. D | 4. B |
| 5. D | 6. D | 7. C | 8. B |

二、选择题

- | | | | |
|-------|---------|--------|--------|
| 9. AC | 10. ABD | 11. BC | 12. AD |
|-------|---------|--------|--------|

三、填空题

- | | |
|--------------------------|---|
| 13. $\frac{1}{4}$ | 14. $\frac{e^x}{x^3}$ (答案不唯一) |
| 15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 16. $\frac{\sqrt{3}}{2} \quad [\frac{11-6\sqrt{3}}{3}, \frac{19}{3}]$ |

四、解答题

17. 解:

(1) 由 $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2a}{c}$ 及正弦定理得

$$\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{2 \sin A}{\sin C}, \quad (1 \text{ 分})$$

所以 $\sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin A \sin B$.结合 $A+B+C=\pi$, 得

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin(\pi - B - C) = \sin(B + C) \\ &= \sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin A \sin B. \end{aligned}$$

因为 $A, B, C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, $\sin C > 0$. (2 分)于是 $\sin B = \frac{1}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. (3 分)因为 $\tan A = 4\sqrt{3} > \sqrt{3}$, 所以 $A > \frac{\pi}{3}$. (4 分)所以 $B = \frac{\pi}{6}$. (5 分)(2) 由 $\tan A = 4\sqrt{3}$, 得 $\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos A = \frac{1}{7}$. (6 分)

由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad (7 \text{ 分})$$

所以 $a = 8\sqrt{3}$. (8 分)

由 (1) 知

$$\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{13}{14}. \quad (9 \text{ 分})$$

由三角形面积公式得

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = 26\sqrt{3}. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解:

$$(1) \text{ 由 } \{a_n\} \text{ 是常数列及 } a_{n+1} = a_n^2 \text{ 得 } a_n^2 = a_n. \quad (1 \text{ 分})$$

所以 $a_n = 0$ 或 $a_n = 1$.

因此 $a = 0$ 或 1 . (3 分)

$$(2) (i) \text{ 由 } a = 2 \text{ 及 } a_{n+1} = a_n^2 \text{ 得 } a_n \geq 2. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n^2 = 2 \log_2 a_n, \text{ 且 } \log_2 a_n > 0. \quad (5 \text{ 分})$$

所以 $\{\log_2 a_n\}$ 是以 1 为首项, 公比为 2 的等比数列. (7 分)

(ii) 由 (i) 知 $\log_2 a_n = 2^{n-1}$. 所以

$$b_n = \frac{\log_2 a_{n+1}}{(\log_2 a_{n+1} - 1)(\log_2 a_{n+2} - 1)} = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}. \quad (10 \text{ 分})$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解:

(1) 连接 SO . 根据圆锥的性质得 $SO \perp$ 平面 ABC .

因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $BC \perp SO$. (1 分)

因为 $\odot O$ 的内接三角形 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $BC \perp OA$. (2 分)

因为 $SO \cap OA = O$, 所以 $BC \perp$ 平面 SOA . (3 分)

而 $SA \subset$ 平面 SOA , 因此 $SA \perp BC$. (4 分)

(2) 由 (1) 知 SO 、 OA 、 BC 两两垂直.

以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系. (5 分)

由圆锥的侧面展开图恰好为半圆得

$$\pi \cdot SA = 2\pi \cdot OA$$

所以 $SA = 2OA = 4$. (6 分)

在 $\text{Rt}\triangle SOA$ 中, 由勾股定理得 $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 2\sqrt{3}$.

于是 $A(0,0,2)$, $B(-\sqrt{3},-1,0)$, $C(\sqrt{3},-1,0)$, $S(0,0,2\sqrt{3})$. (7 分)

由 D 是底面 $\odot O$ 上可设 $D(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)(\theta \in \mathbf{R})$.

于是 $\overrightarrow{SD} = (2\cos\theta, 2\sin\theta, -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC} = (2\sqrt{3}, 0, 0)$, $\overrightarrow{CS} = (-\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$.

由 $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{ES}$ 得 $\overrightarrow{SE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} = (\frac{2}{3}\cos\theta, \frac{2}{3}\sin\theta, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

所以 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SE} = (\frac{2}{3}\cos\theta - \sqrt{3}, \frac{2}{3}\sin\theta + 1, \frac{4\sqrt{3}}{3})$. (8 分)

平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$.

设平面 EBC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$. 由 $\mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BC} = \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ 得

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ (\frac{2}{3}\cos\theta - \sqrt{3})x + (\frac{2}{3}\sin\theta + 1)y + \frac{4\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 0 \\ (2\sin\theta + 3)y = -4\sqrt{3}z \end{cases}$, 不妨取 $\mathbf{n}_2 = (0, -4\sqrt{3}, 2\sin\theta + 3)$. (9 分)

设二面角 $A-BC-E$ 为 φ . 由图可知

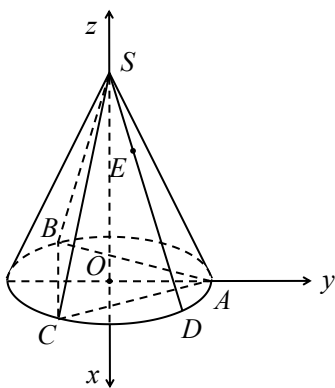
$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2\sin\theta + 3}{\sqrt{1} \times \sqrt{48 + (2\sin\theta + 3)^2}}. \quad (10 \text{ 分})$$

记 $t = 2\sin\theta + 3 \in [1, 5]$, 则

$$\cos\varphi = \frac{t}{\sqrt{48 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{48}{t^2} + 1}} \geq \sqrt{\frac{1}{48 + 1}} = \frac{1}{7}. \quad (11 \text{ 分})$$

当且仅当 $\sin\theta = -1$, 即点 D 位于劣弧 BC 中点时, 等号成立.

因此二面角 $A-BC-E$ 余弦值的最小值是 $\frac{1}{7}$. (12 分)



20. 解:

(1) 选择的回归模型是 $\hat{A} = b \lg p + a$. (1 分)

由题设数据, 利用最小二乘法得到

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{10} A_i q_i - 10 \overline{A} \overline{q}}{\sum_{i=1}^{10} q_i^2 - 10 \overline{q}^2} = \frac{84000 - 10 \times 360 \times 10}{2500 - 10 \times 10^2} = 32, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\hat{a} = \overline{A} - \hat{b} \overline{q} = 360 - 32 \times 10 = 40. \quad (6 \text{ 分})$$

因此中间变量 A 与降雨重现期 p 的线性回归方程为 $\hat{A} = 32 \lg p + 40$.

结合题设知暴雨强度 i 、降雨历时 t 、降雨重现期 p 具有的函数关系是

$$i = \frac{32 \lg p + 40}{(t + 20)^{0.85}}. \quad (8 \text{ 分})$$

(2) 由题设可取 $i = 3.4 \text{ mm/min}$, $t = 60 \text{ min}$ 代入 (1) 中函数关系, 得

$$3.4 = \frac{32 \lg p + 40}{(60 + 20)^{0.85}}.$$

$$\text{所以 } p = 10^{\frac{3.4 \times 40 - 40}{32}} = 1000 \text{ (年)}. \quad (10 \text{ 分})$$

因此可以认为“今年河南的暴雨千年一遇”. (12 分)

21. 解:

$$f(x) \text{ 的定义域是 } (0, +\infty). \text{ 求导得 } f'(x) = a \ln x - x + \frac{1}{x}. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x), \text{ 得 } g'(x) = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}. \quad (2 \text{ 分})$$

注意到 $f(1) = f'(1) = 0$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 注意到 $g'(x) = -\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 1$.

因此 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. (3 分)

所以在 $(0, 1)$ 上 $f'(x) > f'(1) = 0$, 在 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) < f'(1) = 0$.

因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

于是 $f(x) \leq f(1) = 0$. (4 分)

(2) (i) ①若 $a \leq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 有且仅有 1 个极值点, 不合题意.

②若 $0 < a < 2$, 因为二次函数 $y = x^2 - ax + 1$ 的判别式 $\Delta = a^2 - 4 < 0$, 所以 $g'(x) < 0$ 恒成立, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 有且仅有 1 个极值点, 不合题意.

③若 $a = 2$, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 有且仅有 1 个极值点, 不合题意. (5 分)

④若 $a > 2$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

记 $x_A = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $x_B = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, 结合二次函数 $y = x^2 - ax + 1$ 的

图象可知, 在 (x_A, x_B) 上 $g'(x) > 0$, 在 $(0, x_A) \cup (x_B, +\infty)$ 上 $g'(x) < 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, x_A)$, $(x_B, +\infty)$ 上分别单调递减, 在 (x_A, x_B) 上单调递增. (6 分)

因此 $f'(x_A) < f'(1) = 0$, $f'(x_B) > f'(1) = 0$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, 因为 $\ln x \leq x - 1 < x$, 所以 $\ln x = -2 \ln \sqrt{\frac{1}{x}} > -2 \sqrt{\frac{1}{x}}$.

取 $x_0 < \frac{9}{64a^2} < \frac{1}{2}$, 则 $x_0 < \frac{1}{4x_0}$, $\frac{2a}{\sqrt{x_0}} < \frac{3}{4x_0}$,

则 $f'(x_0) > -\frac{2a}{\sqrt{x_0}} - x_0 + \frac{1}{x_0} = (\frac{1}{4x_0} - x_0) + (\frac{3}{4x_0} - \frac{2a}{\sqrt{x_0}}) > 0$.

由零点存在性定理, $\exists$ 唯一 $x_1 \in (0, x_A)$, $f'(x_1) = 0$.

即 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有且仅有一个变号零点 x_1 . (7 分)

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 因为 $f'(\frac{1}{x_1}) = a \ln \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1} + x_1 = -(a \ln x_1 - x_1 + \frac{1}{x_1}) = 0$,

且 $f'(x)$ 在 $(x_B, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有且仅有一个变号零点

$\frac{1}{x_1}$.

此时 $x_1, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{x_1}$ 是 $f(x)$ 的极值点.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$. (8 分)

(ii) 由 (i) 知 $f(x)$ 恰好有 3 个极值点当且仅当 $a > 2$.

此时我们有 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} = x_3^2 + \frac{2}{x_3}$. (9 分)

设 $h(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, 则我们只需要证明 $h(x_3) > a^2 - 4a + 7$.

求导得 $h'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

注意到 $x_3 > x_B = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > a - 1 > 1$, 所以 $h(x_3) > (a - 1)^2 + \frac{2}{a - 1}$. (10 分)

因此我们只需要证明 $(a-1)^2 + \frac{2}{a-1} > a^2 - 4a + 7$.

实际上, 上式等价于 $(a-2)^2 > 0$, 显然成立. 因此原不等式得证. (12 分)

22. 解:

(1) 令 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 为 C 的半焦距, 由题设得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = 2 \\ a + c = 3 \end{cases}$. (2 分)

解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 2 \end{cases}$. 所以 C 的标准方程是 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. (4 分)

(2) (i) 由题设得 $B(-x_0, -y_0)$, $E(-\frac{5}{3}x_0, y_0)$.

所以直线 BF 的方程是 $y = -3\frac{y_0}{x_0}x - 4y_0$. 把它代入 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 得

$$(\frac{9y_0^2}{x_0^2} - 3)x^2 + \frac{24y_0^2}{x_0}x + (16y_0^2 + 3) = 0. \quad (5 \text{ 分})$$

直线 BF 与 C 有 2 个交点, 则 $\frac{9y_0^2}{x_0^2} - 3 \neq 0$.

由韦达定理得 $x_F \cdot (-x_0) = \frac{16y_0^2 + 3}{\frac{9y_0^2}{x_0^2} - 3}$, 解得 $x_F = \frac{16y_0^2 + 3}{3x_0 - \frac{9y_0^2}{x_0}}$. (7 分)

所以 $y_F = -3\frac{y_0}{x_0}x - 4y_0 > 0$, 得 $x_F < -\frac{4}{3}x_0 < 0$ 已经成立.

因此只需要 $x_F = \frac{16y_0^2 + 3}{3x_0 - \frac{9y_0^2}{x_0}} < -\frac{4}{3}x_0$, 解得 $x_0 > \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

所以 x_0 的取值范围是 $(\frac{3\sqrt{2}}{4}, +\infty)$. (8 分)

(ii) 由 (i) 可知

$$k_{AF} = \frac{y_0 + 3\frac{y_0}{x_0}x_F + 4y_0}{x_0 - x_F} = \frac{-3\frac{y_0}{x_0}(x_0 - x_F) + 8y_0}{x_0 - x_F}$$

$$\begin{aligned}
&= -3 \frac{y_0}{x_0} + \frac{8y_0}{x_0 + \frac{16y_0^2 + 3}{\frac{9y_0^2}{x_0} - 3x_0}} = -3 \frac{y_0}{x_0} + \frac{\frac{72y_0^3}{x_0} - 24x_0y_0}{9y_0^2 + 16y_0^2 + 3 - 3x_0^2} \\
&= -3 \frac{y_0}{x_0} + \frac{\frac{72y_0^3}{x_0} - 24x_0y_0}{24y_0^2} = -3 \frac{y_0}{x_0} + \frac{72y_0}{24x_0} - \frac{24x_0y_0}{24y_0^2} = -\frac{x_0}{y_0}.
\end{aligned}$$

所以 $k_{AF}k_{OA} = -1$ ，即 $\angle OAF = \frac{\pi}{2}$. (11 分)

因为 $\tan \angle BAE = k_{OA} = \frac{y_0}{x_0} = \sqrt{3(1 - \frac{1}{x_0^2})} \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$,

所以 $\angle BAE \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

因此 AE 不可能是 $\angle BAF$ 的三等分线. (12 分)