2022 届新高三 8 月份调研考试试卷

数　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 本试卷满分 150 分，考试时间为 150 分钟。考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，复数 $(2-\mathrm{i})^2$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设集合 $A=\{x|-3\le 2x-1\le 3\}$ ，集合 B 为函数 $y=\lg(x-1)$ 的定义域，则 $A\bigcap B=$

A. $(1,2)$　　B. $[1,2]$　　C. $[1,2)$　　D. $(1,2]$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(k,3)$ ，$\boldsymbol{b}=(1,4)$ ，$\boldsymbol{c}=(2,1)$ ，且 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$ ，则实数 $k=$

A. $-\dfrac{9}{2}$　　B. 0　　C. 3　　D. $\dfrac{15}{2}$

4. 使 $(3x\pm\dfrac{1}{x\sqrt{x}})^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 的展开式中含有常数项的最小的 n

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

5. 容量为 20 的样本数据，分组后的频数如下表：

分组	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$
频数	2	3	4	5	4	2

则样本数据落在区间 $[10,40)$ 的频率为

A. 0.35　　B. 0.45　　C. 0.55　　D. 0.65

6. 已知过点 $P(2,2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切，且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直，则 $a=$

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

7. 命题"存在一个无理数，它的平方是有理数"的否定是

A. 任意一个有理数，它的平方是有理数

B. 任意一个无理数，它的平方不是有理数

C. 存在一个有理数，它的平方是有理数

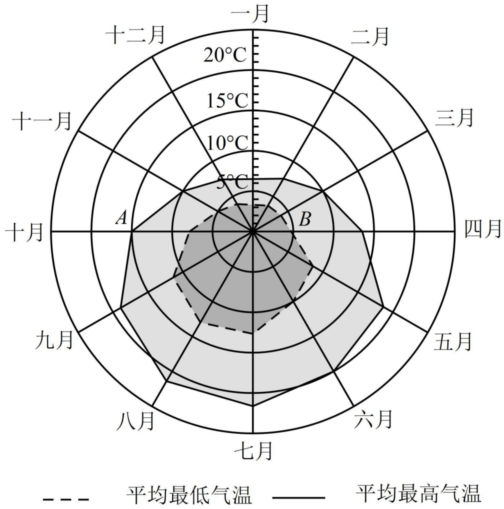
D. 存在一个无理数，它的平方不是有理数

8. 已知$b>0,\log_5 b=a,\lg b=c,5^{a}=10$，则下列等式一定成立的是

A. $d=ac$　　　B. $a=cd$　　　C. $c=ad$　　　D. $d=a+c$

二、多项选择题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得**5**分，部分选对的得**3**分，有选错的得**0**分。

9. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图．图中A点表示十月的平均最高气温约为$15^{\circ}\mathrm{C}$，B点表示四月的平均最低气温约为$5^{\circ}\mathrm{C}$．下面叙述正确的有



A.各月的平均最低气温都在$0^{\circ}\mathrm{C}$以上

B.七月的平均温差比一月的平均温差大

C.三月和十一月的平均最高气温基本相同

D.平均最高气温高于$20^{\circ}\mathrm{C}$的月份有5个

10. 若实数k满足$0<k<9$，则关于曲线$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9-k}=1$与曲线$\dfrac{x^2}{25-k}-\dfrac{y^2}{9}=1$，下列说法不正确的有

A. 焦距相等　　　B. 实半轴长相等　　　C. 虚半轴长相等　　　D. 离心率相等

11. 在空间中，如下四个命题正确的是有

A. 平行于同一个平面的两条直线是平行直线

B. 垂直于同一条直线的两个平面是平行平面

C. 若平面α内有不共线的三个点到平面β距离相等，则$\alpha P\beta$

D. 过平面α的一条斜线有且只有一个平面与平面α垂直

12. 下列命题中不正确的有

A. $a=1$是直线$x-ay=0$与直线$x+ay=0$互相垂直的充要条件

B. 直线$x=\dfrac{\pi}{12}$是函数$y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$的图像的一条对称轴

C. 已知直线$l:x+y+2=0$与圆$C:(x-1)^2+(y+1)^2=2$，则圆心C到直线的距离是$2\sqrt{2}$

D. 若命题P:“存在$x_0\in\mathbf{R},x^2-x-1>0$，$x^2-x_0-1>0$"，则命题$P$的否定："任意$x\in\mathbf{R},x^2-x-1\le 0$"

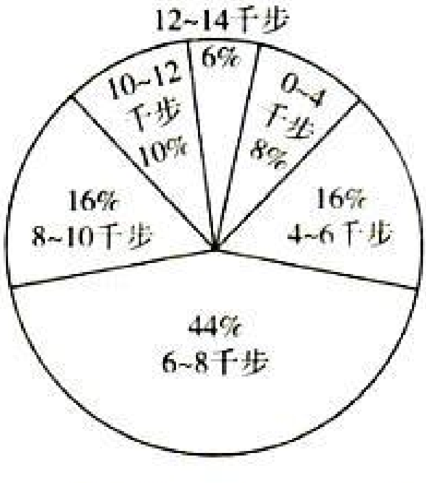
三、填空题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分。

13．若$\forall x\in(0,+\infty)$，$\dfrac{4x^2+1}{x}\le m$，则实数m的取值范围为___．

14．已知$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos(\dfrac{2\pi}{3}-2\alpha)=$______．

15．F_1是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$(a > 0, b > 0)的左焦点，$A$为虚轴一端点，若以$A$为圆心的圆与双曲线的一条渐近线相切于点$B$，且$A$，$B$，$F_1$三点共线，则双曲线的离心率为_______．

16．习近平总书记在党的十九大工作报告中提出，永远把人民对美好生活的向往作为奋斗目标．在这一号召的引领下，全国人民积极工作，健康生活．当前，“日行万步”正成为健康生活的代名词．某学校工会积极组织该校教职工参与“日行万步”活动，并随机抽取了该校100名教职工，统计他们的日行步数，按步数分组，得到如图饼图：若从日行步数超过10千步的教职工中随机抽取两人，则这两人的日行步数恰好一人在$10\sim12$千步，另一人在$12\sim14$千步的概率是________；设抽出的这两名教职中日行步数超过12千步的人数为随机变量X，则$E(X)=$________．



各段日行步数人数比例

四、解答题：本题共**6**小题，共**70**分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(10分)

ΔABC中的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，设$b+b\cos A=\sqrt{3}\ a\sin B$．

(1)求A；

(2)若$b+c=\sqrt{2}\ a$，ΔABC的外接圆半径为2，求ΔABC的面积．

18．(12分)

在①$3S_{n+1}=S_n+1$，②$a_2=\dfrac{1}{9}$,③$2S_n=1-3a_{n+1}$这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，并给出解答．

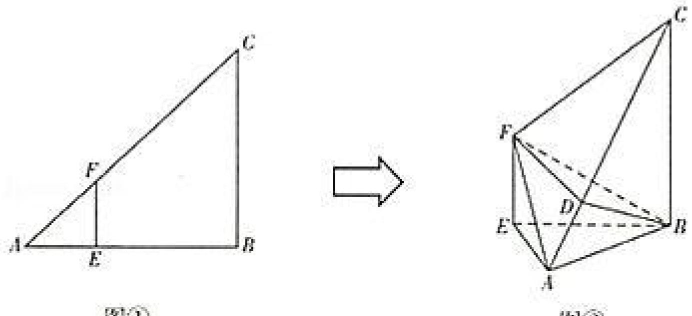
已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足_，_____；又知正项等差数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，且b_1，b_2-1，b_3成等比数列．

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)证明：$a_{b_1}+a_{b_2}+...+a_{b_n}<\dfrac{3}{26}$

19．(12分)

如图①，在RtΔABC中，B为直角，$AB=BC=6$，$EF//BC$，$AE=2$，沿EF将ΔAEF折起，使$\angle AEB=\dfrac{\pi}{3}$，得到如图②的几何体，点$D$在线段$AC$上．



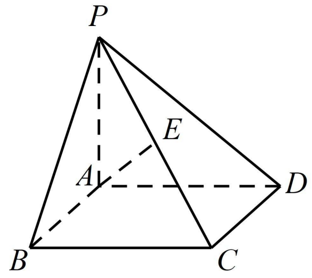
图①　　　　　图②

(1)求证：平面$AEF\perp$平面ABC；

(2)若$AE//$平面BDF，求直线AF与平面BDF所成角的正弦值．

20.（12 分）

如图，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，$PA\perp$底面$ABCD$，E是PC的中点．已知$AB=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$PA=2$．求：



（1）三角形PCD的面积；

（2）异面直线BC与AE所成的角的大小．

21.（12 分）

已知椭圆$C: x^2+2y^2=4$．

（1）求椭圆C的离心率；

（2）设O为原点，若点A在直线$y=2$上，点B在椭圆C上，且$OA\perp OB$，求线段AB长度的最小值．

22.（12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{a}{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}$其中$a\in\mathbf{R}$，且曲线$y=$在点$(1,f(1))$处的切线垂直于$y=\dfrac{1}{2}x$．

（1）求a的值；

（2）求函数$f(x)$的单调区间和极值．

每日
领券专享超低价

每周
推送甄选教学资源清单

每月
分享名校名师私享课程及课件

不定期领取教辅图书及学科网独家试卷

专属客服快一步获取服务

扫一扫二维码
关注学科网服务号
一键获取所有服务，满足需求更快一步

回复：教学模板
领取35套教学ppt模板

关注微信公众号：高斯课堂 获取更多精品资料

2022 届新高三 8 月份调研考试试卷

数学参考答案解析

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.D 【解析】因为 $(2-\mathrm{i})2=3-4\mathrm{i}$，所以该复数对应的点位于第四象限.故选 D.

2.D 【解析】$A=\{x\mid -3\le 2x-1\le 3\}=[-1,2]$，$B=(1,+\infty)$，$A\cap B=(1,2]$．故选 D.

3.C 【解析】$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(2k-3,-6)$，$\because$ $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\perp \boldsymbol{c}$，$\therefore 2(2k-3)-6=0$，$\therefore k=3$．故选 C.

4.B 【解析】展开式通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r(3x)^{n-r}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^r=3^{n-r}\mathrm{C}_n^r\cdot x^{n-\frac{5}{2}r}$，常数项要满足 $n-\dfrac{5}{2}r=0$，所以满足条件的最小的 n 为 5．故选 B.

5.B 【解析】数据落在 $[10,40)$ 的频率为 $\dfrac{2+3+4}{20}=\dfrac{9}{20}=0.45$.故选 B.

6.C 【解析】由题意知点 $P(2,2)$ 在圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 上，设切线的斜率为 k，则 $k\cdot\dfrac{2-0}{2-1}=-1$，解得 $k=-\dfrac{1}{2}$，直线 $ax-y+1=0$ 的斜率为 a，且与切线垂直，所以 $-\dfrac{1}{2}a=-1$，解得 $a=2$．故选 C.

7.B 【解析】由题知，原命题是一个存在命题，因此其否定形式为特称命题，“存在一个无理数”变为“任意一个无理数”，再把结论“它的平方是有理数”予以否定.故选 B.

8.B 【解析】因为 $\log_5 b=a,\lg b=c$，所以 $5^a=b,b=10^c$.

又 $5^d=10$，所以 $5^a=b=10^c=(5^d)^c=5cd$，所以 $a=cd$．故选 B.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

9.ABC 【解析】对于选项 A，由图易知各月的平均最低气温都在 $0^\circ\mathrm{C}$ 以上，A 正确；

对于选项 B，七月的平均最高气温点与平均最低气温点间的距离大于一月的平均最高气温点与平均最低气温点间的距离，所以七月的平均温差比一月的平均温差大，B 正确；

对于选项 C，三月和十一月的平均最高气温均为 $10^\circ\mathrm{C}$，所以 C 正确；

对于选项 D，平均最高气温高于 $20^\circ\mathrm{C}$ 的月份有七月、八月，共 2 个月份，故 D 错误．故选 ABC.

10.BCD【解析】因为 $0<k<9$，所以两条曲线都表示双曲线．双曲线 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 的实半轴长为 5，虚半轴长为 $\sqrt{9-k}$，焦距为 $2\sqrt{25+9-k}=2\sqrt{34-k}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{34-k}}{5}$．双曲线 $\dfrac{x^2}{25-k}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的实半轴长为 $\sqrt{25-k}$，虚半轴长为 3，焦距为 $2\sqrt{25-k+9}=2\sqrt{34-k}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{34-k}}{\sqrt{25-k}}$，故两曲线只有焦距相等．故选 BCD.

11.BD 【解析】对于选项 A，平行于同一个平面的两条直线，可能平行，相交或异面．不正确；

对于选项 B，垂直于同一条直线的两个平面是平行平面，由线面垂直的性质定理知正确；

对于选项 C，若平面 α 内有不共线的三个点到平面 β 距离相等，则 α 与 β 可能平行，也可能相交，不

正确；

对于选项 D，过平面α的一条斜线有且只有一个平面与平面α垂直．正确，因为一条斜线只有一条射影，只能确定一个平面．故选 BD.

12.ABC 【解析】直线$x-ay=0$与直线$x+ay=0$垂直的充要条件为$a=\pm 1$，故 A 不正确．$x=\dfrac{\pi}{12}$时，$y=0$，故 B 不正确．圆心C到直线l的距离为$\dfrac{|1-1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，故 C 不正确．由特称命题的否定可知，D 正确．故选 ABC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若$\forall x\in(0,+\infty)$，$\dfrac{4x^2+1}{x}\quad m$，则实数m的取值范围为__$(-\infty$,_ $4]$__.

【解析】因为$x>0$，则$\dfrac{4x^2+1}{x}=4x+\dfrac{1}{x}\quad 2\sqrt{4x\bullet\dfrac{1}{x}}=4$，当且仅当$4x=\dfrac{1}{x}$即$x=\dfrac{1}{2}$时取等号，

因为$\dfrac{4x^2+1}{x}\quad m$，

所以$4\quad m$，

故答案为：$(-\infty$ ，$4]$

14．已知$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos(\dfrac{2\pi}{3}-2\alpha)=$__$-\dfrac{1}{3}$__.

【解析】$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\sin[\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)]=\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

则$\cos(\dfrac{2\pi}{3}-2\alpha)=\cos 2(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=2\cos^2(\alpha-\dfrac{\pi}{3})-1=2\times(\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2-1=-\dfrac{1}{3}$.

故答案为：$-\dfrac{1}{3}$.

15．F_1是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点，$A$为虚轴一端点，若以$A$为圆心的圆与双曲线的一条渐近线相切于点$B$，且$A$，$B$，$F_1$三点共线，则双曲线的离心率为__$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$__.

【解析】设$F_1(-c,0)$，$A(0,b)$，

双曲线的一条渐近线方程为$bx+ay=0$，

由题意可得直线AB的斜率为$\dfrac{a}{b}$，

由A，B，F_1三点共线，可得：

$k_{AF_1}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}$，

即$ac=b^2=c^2-a^2$，

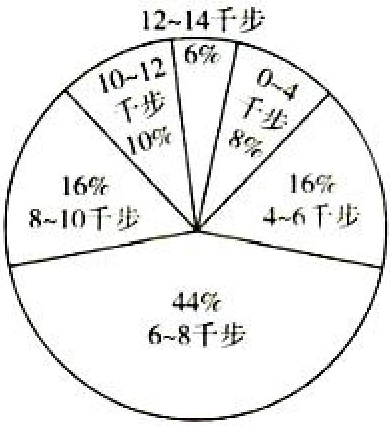
由 $e=\dfrac{c}{a}$，可得 $e^2-e-1=0$，

解得 $e=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，(负的舍去)，

故答案为：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

16. 习近平总书记在党的十九大工作报告中提出，永远把人民对美好生活的向往作为奋斗目标．在这一号召的引领下，全国人民积极工作，健康生活．当前，“日行万步”正成为健康生活的代名词．某学校工会积极组织该校教职工参与“日行万步”活动，并随机抽取了该校 100 名教职工，统计他们的日行步数，按步数分组，得到如图饼图：

若从日行步数超过 10 千步的教职工中随机抽取两人，则这两人的日行步数恰好一人在 $10\sim12$ 千步，另一人在 $12\sim14$ 千步的概率是__$\dfrac{1}{2}$__；设抽出的这两名教职中日行步数超过 12 千步的人数为随机变量 X，则 $E(X)=$____.



各段日行步数人数比例

【解析】由饼图得日行步数超过 10 千步的教职工有 $100\times(10\%+6\%)=16$ 人，

其中日行步数在 $10\sim12$ 千步的教职工有 $100\times10\%=10$ 人，

日行步数恰好一人在 $12\sim14$ 千步的教职工有 $100\times6\%=6$ 人，

$\therefore$ 从日行步数超过 10 千步的教职工中随机抽取两人，

基本事件总数 $n=C_{16}^2=120$，

这两人的日行步数恰好一人在 $10\sim12$ 千步，另一人在 $12\sim14$ 千步包含的基本事件个数 $m=C_{10}^1C_6^1=60$，

则这两人的日行步数恰好一人在 $10\sim12$ 千步，另一人在 $12\sim14$ 千步的概率是 $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$.

设抽出的这两名教职中日行步数超过 12 千步的人数为随机变量 X，

则 X 的可能取值为 0，1，2，

$P(X=2)=\dfrac{C_6^2}{C_{16}^2}=\dfrac{15}{120}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_{10}^1C_6^1}{C_{16}^2}=\dfrac{60}{120}$，

$P(X=0)=\dfrac{C_{10}^2}{C_{16}^2}=\dfrac{45}{120}$，

$\therefore EX=2\times\dfrac{15}{120}+1\times\dfrac{60}{120}+0\times\dfrac{45}{120}=\dfrac{3}{4}$.

故答案为：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）ΔABC 中的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，设 $b+b\cos A=\sqrt{3}a\sin B$.

（1）求 A；

（2）若 $b+c=\sqrt{2}a$，ΔABC 的外接圆半径为 2，求 ΔABC 的面积.

【解析】（1）由正弦定理知，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$ ①，

$\because b+b\cos A=\sqrt{3}a\sin B$，$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}\sin B}{1+\cos A}$ ②，

由①②可得，$1=\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin(A-\dfrac{\pi}{6})$，

$\therefore A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 或 π，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由正弦定理可知，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$，即 $\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\times2$，$\therefore a=2\sqrt{3}$，

由余弦定理知，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\dfrac{a^2-2bc}{2bc}$，即 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{12-2bc}{2bc}$，$\therefore bc=4$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

故 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$.

18.（12 分）在① $3S_{n+1}=S_n+1$，② $a_2=\dfrac{1}{9}$，③ $2S_n=1-3a_{n+1}$ 这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，并给出解答.

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足____，____；又知正项等差数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，且b_1，b_2-1，b_3成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）证明：$a_{b_1}+a_{b_2}+\ldots+a_{b_n}<\dfrac{3}{26}$.

【解析】选择①②：

（1）解：由$3S_{n+1}=S_n+1\Rightarrow$当$n\ \ 2$时，有$3S_n=S_{n-1}+1$，两式相减得：$3a_{n+1}=a_n$，即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$，$n\ \ 2$. 又当$n=1$时，有$3S_2=S_1+1=3(a_1+a_2)$，又$\because a_2=\dfrac{1}{9}$，$\therefore a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{3}$也适合，所以数列$\{a_n\}$是首项、公比均为$\dfrac{1}{3}$的等比数列，所以$a_n=(\dfrac{1}{3})^n$；设正项等差数列$\{b_n\}$的公差为$d$，$\because b_1=2$，且$b_1$，$b_2-1$，$b_3$成等比数列，$\therefore(b_2-1)^2=b_1b_3$，

即$(2+d-1)^2=2(2+2d)$，解得：$d=3$或$d=-1$（舍），$\therefore b_n=2+3(n-1)=3n-1$，故$a_n=(\dfrac{1}{3})^n$，$b_n=3n-1$.

（2）证明：由（1）可得$a_{b_n}=(\dfrac{1}{3})^{3n-1}$，$\therefore a_{b_1}+a_{b_2}+\ldots+a_{b_n}=\dfrac{\frac{1}{9}[1-(\frac{1}{27})^n]}{1-\frac{1}{27}}=\dfrac{3}{26}[1-(\dfrac{1}{27})^n]<\dfrac{3}{26}$.

选择：②③：

（1）解：由$2S_n=1-3a_{n+1}\Rightarrow$当$n\ \ 2$时，$2S_{n-1}=1-3a_n$，两式相减得：$2a_n=-3a_{n+1}+3a_n$，即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$，$n\ \ 2$．又当$n=1$时，有$2S_1=1-3a_2=2a_1$，又$\because a_2=\dfrac{1}{9}$，$\therefore a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{3}$也适合，所以数列$\{a_n\}$是首项、公比均为$\dfrac{1}{3}$的等比数列，所以$a_n=(\dfrac{1}{3})^n$；设正项等差数列$\{b_n\}$的公差为$d$，$\because b_1=2$，且$b_1$，$b_2-1$，$b_3$成等比数列，$\therefore(b_2-1)^2=b_1b_3$，

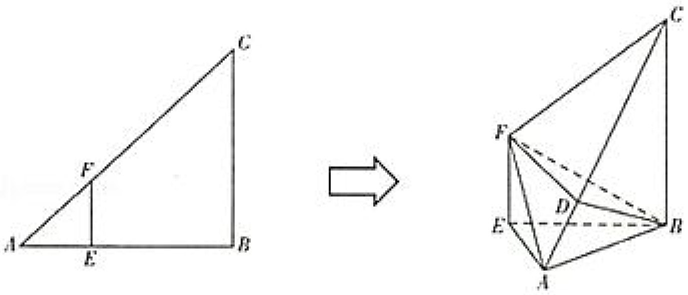
即$(2+d-1)^2=2(2+2d)$，解得：$d=3$或$d=-1$（舍），$\therefore b_n=2+3(n-1)=3n-1$，故$a_n=(\dfrac{1}{3})^n$，$b_n=3n-1$.

（2）证明：由（1）可得$a_{b_n}=(\dfrac{1}{3})^{3n-1}$，$\therefore a_{b_1}+a_{b_2}+\ldots+a_{b_n}=\dfrac{\frac{1}{9}[1-(\frac{1}{27})^n]}{1-\frac{1}{27}}=\dfrac{3}{26}[1-(\dfrac{1}{27})^n]<\dfrac{3}{26}$.

19.（12分）如图①，在RtΔABC中，B为直角，$AB=BC=6$，$EF//BC$，$AE=2$，沿EF将ΔAEF折起，使$\angle AEB=\dfrac{\pi}{3}$，得到如图②的几何体，点$D$在线段$AC$上.

（1）求证：平面$AEF\perp$平面ABC；

（2）若 $AE//$平面 BDF，求直线 AF 与平面 BDF 所成角的正弦值.



图①　　　　图②

【解答】（1）证明：$AB\perp BC$，$EF//BC$，$\therefore EF\perp AE$，$EF\perp BE$，

又 $EA\bigcap EB=E$，$\therefore EF\perp$平面 AEB，则 $EF\perp AB$，

在 ΔAEB 中，由 $AE=2$，$EB=4$，$\angle AEB=\dfrac{\pi}{3}$，

得 $AB^2=4+16-2\times2\times4\times\dfrac{1}{2}=12$.

$\therefore AE^2+AB^2=BE^2$，即 $AE\perp AB$，

又 $AE\bigcap EF=E$，$\therefore AB\perp$平面 AEF，

而 $AB\subset$平面 ABC，则平面 $AEF\perp$平面 ABC；

（2）解：以 A 为坐标原点，分别以 AB，AE 所在直线为 x，y 轴，

以过 A 垂直于平面 AEB 的直线为 z 轴建立如图所示空间直角坐标系.

则 $A(0,0,0)$，$E(0,2,0)$，$B(2\sqrt{3},0,0)$，$F(0,2,2)$，$C(2\sqrt{3},0,6)$.

$\overrightarrow{AE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{3},0,6)$，$\overrightarrow{BF}=(-2\sqrt{3},2,2)$.

设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{3}\lambda,0,6\lambda)(0<\lambda\quad 1)$.

则 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=(2\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3},0,6\lambda)$，

设平面 BDF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{BF}=-2\sqrt{3}x+2y+2z=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{BD}=(2\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3})x+6\lambda z=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,\dfrac{4\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{3\lambda},\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}{3\lambda})$.

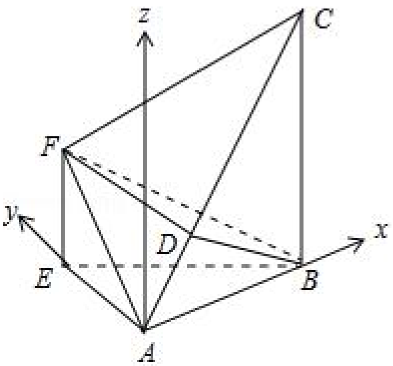
由 $AE//$平面 BDF，得 $\overrightarrow{AE}\bullet\vec{n}=\dfrac{4\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{3\lambda}=0$，即 $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore \vec{n}=(1,0,\sqrt{3})$.

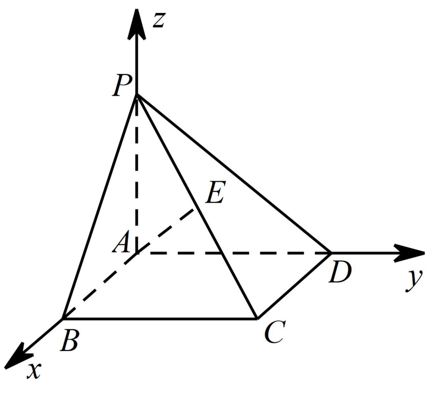
设直线 AF 与平面 BDF 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AF}>|=\dfrac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AF}|}{|\vec{n}|\bullet|\overrightarrow{AF}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

$\therefore$ 直线 AF 与平面 BDF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



20.【解析】(1) 因为 $PA\perp$ 底面$ABCD$， $CD\subset$ 平面$ABCD$，所以 $PA\perp CD$.
又 $AD\perp CD$， $PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面PAD，从而 $CD\perp PD$.
因为在直角三角形 PCD 中， $PD=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$， $CD=2$，
所以三角形 PCD 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.
(2) 解法一：如图所示，建立空间直角坐标系，



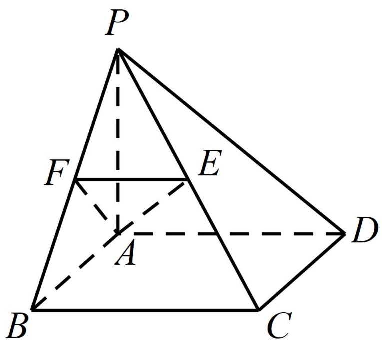
则 $B\left(2,0,0\right)$， $C\left(2,2\sqrt{2},0\right)$， $E\left(1,\sqrt{2},1\right)$， $\overrightarrow{AE}=\left(1,\sqrt{2},1\right)$， $\overrightarrow{BC}=\left(0,2\sqrt{2},0\right)$.
设 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{4}{2\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$,

由此知，异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\dfrac{\pi}{4}$.

解法二：如图所示，



取 PB 的中点 F，连接 EF， AF，则 $EF \parallel BC$，
从而 $\angle AEF$（或其补角）是异面直线 BC 与 AE 所成的角.
在 $\triangle AEF$ 中，由 $EF=\sqrt{2}$， $AF=\sqrt{2}$， $AE=2$，
知 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle AEF=\dfrac{\pi}{4}$，
因此，异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小是 $\dfrac{\pi}{4}$.

21.【解析】（1）由题意，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$,
所以 $a^2=4$， $b^2=2$，从而 $c^2=a^2-b^2=2$,
因此 $a=2, c=\sqrt{2}$,
故椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
（2）设点 A， B 的坐标分别为 $(t,2)$， (x_0,y_0)，其中 $x_0\neq 0$，
因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,
即 $tx_0+2y_0=0$，解得 $t=-\dfrac{2y_0}{x_0}$,
又 $x_0^2+2y_0^2=4$，所以

$$|AB|^2=(x_0-t)^2+(y_0-2)^2$$

$$=\left(x_0+\frac{2y_0}{x_0}\right)^2+(y_0-2)^2$$

$$={x_0}^2+{y_0}^2+\frac{4y_0^2}{x_0^2}+4$$

$$=x_0^2+\frac{4-x_0^2}{2}+\frac{2(4-x_0^2)}{x_0^2}+4$$

$$=\frac{x_0^2}{2}+\frac{8}{x_0^2}+4(0<x_0^2\le 4),$$

因为 $\dfrac{x_0^2}{2}+\dfrac{8}{x_0^2}\ge 4(0<x_0^2\le 4)$,

且当 $x_0^2=4$ 时等号成立，所以 $|AB|^2\geq 8$，故线段 AB 长度的最小值为 $2\sqrt{2}$.

22.【解析】（1）对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$,

由 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$ 知

$f'(1)=-\frac{3}{4}-a=-2$,

解得 $a=\frac{5}{4}$.

（2）由（1）知 $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4x}-\ln x-\frac{3}{2}$,

则 $f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-4x-5}{4x^2}$,

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=5$,

因为 $x=-1$ 不在 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内，故舍去.

当 $x\in(0,5)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,5)$ 内为减函数；

当 $x\in(5,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 内为增函数.

由此知函数 $f(x)$ 在 $x=5$ 时取得极小值 $f(5)=-\ln 5$.