

2021 年新高考第三次适应性考试

数 学

2021.5

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\frac{1-2i}{1+i} + \frac{1+2i}{1-i} =$

- A. -1 B. $-i$ C. 1 D. i

2. 已知随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$ ，若 $P(X \geq 0) = 0.6$ ，则 $P(X > 2) =$

- A. 0.2 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.8

3. 1943 年深秋的一个夜晚，年仅 19 岁的曹火星在晋察冀边区创作了歌曲《没有共产党就没有中国》，毛主席得知后感觉歌名的逻辑上有点问题，遂提出修改意见，将歌名改成《没有共产党就没有新中国》，今年恰好是建党 100 周年，请问“没有共产党”是“没有新中国”的 _____ 条件.

- A. 充分 B. 必要 C. 充分必要 D. 既非充分又非必要

4. 已知 $a = \log_3 5$ ， $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$ ，则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

5. $(x^2 + 3x + 2)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为

- A. 625 B. 800 C. 750 D. 600

6. 已知正三角形 ABC 的边长为 3, 且 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{RA}$, 则 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} =$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a_1^2} + y^2 = 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a_2^2} - y^2 = 1$ 有相同的焦点 F_1, F_2 , 设椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则

- A. $e_1 e_2 = 1$ B. $e_2^2 - e_1^2 = 1$
C. $e_1^2 + e_2^2 = 2e_1^2 e_2^2$ D. $e_2 = 2e_1$

8. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面 PAD 为正三角形, 底面 $ABCD$ 为矩形, 且面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, 若 $PA = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $AB = 2$, 则该四棱锥内可以放置最大的球的半径为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $2 - \sqrt{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 则下列不等式一定成立的是

- A. $a^2 b^2 + c^2 d^2 \geq 2abcd$
B. $a^4 + b^4 \geq a^3 b + ab^3$
C. $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$
D. $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} > \sqrt{(a - c)^2} + \sqrt{(b - d)^2}$

10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, $A(1, 0)$, $C(4, 0)$, 点 P 在圆上且在第一象限内, 则下列结论正确的是

- A. $PC = 2PA$ B. $\angle PCA \leq \frac{\pi}{6}$ C. $\angle PAC > 2\angle PCA$ D. $\angle PAC < 2\angle PCA$

11. 已知正方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, 设与对角线 AC_1 垂直的平面 α 截正方体表面所得截面

多边形记为 M ，则关于多边形 M 的说法正确的是

- A. M 可能为正三角形 B. M 可能为正方形
C. 若 M 为六边形，则面积为定值 D. 若 M 为六边形，则周长为定值

12. 已知声音是由物体振动产生的声波.其中包含着正弦函数或余弦函数，而纯音的数学模型是函数 $y = A \sin \omega t$ ，我们听到的声音是由纯音合成的，称之为复合音.若一个复合音的数学模型是函数 $f(x) = 2 \sin x - \sin 3x$ ，则下列说法正确的是

- A. π 是 $f(x)$ 的一个周期 B. $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 7 个零点
C. $f(x)$ 的最大值为 3 D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$ ， $x + 2y = 1$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{x+y}{y}$ 的最小值为_____.

14. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，现有下列四个判断：

甲： $a > b$ ； 乙： $\sin A > \cos B$ ； 丙： $\tan(A - B) > 0$ ；丁： $\cos A < \cos B$.

若上述四个论断有且只有一个是正确的，那么正确的是_____.

15. 已知圆周上等距离的排列着八个点 $A_1, A_2, \dots, A_8$ ，现从中任取三个不同的点作为一个三角形的三个顶点，则恰好能构成一个直角三角形的概率为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \sum_{i=1}^{2021} |x - i|$ ，则当 $x = x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值，则 $x_0 =$ _____，

此时 $g(x_0) = \sum_{i=1}^{2021} (x_0 - i) =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 中， $B = \frac{\pi}{3}$ ， $AC = \sqrt{13}$ ，_____，求 $S_{\triangle ABC}$.

请从① $\sin A = 4 \sin C$ ；② $a - c = 3$ ；③ $\cos C = \frac{7}{26} \sqrt{13}$ 三个条件中选择一个补充在上面问

题中，并作答.

18 . (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1$, $2S_n = a_n a_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;

(2) 若 $b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19 . (12 分) 某空调商家 , 对一次性购买两台空调的客户推出两种质保期两年内的保维修方案 :

方案一 : 交纳质保金 300 元 , 在质保的两年内两条空调共可免费维修 2 次 , 超过 2 次每次收取维修费 200 元 .

方案二 : 交纳质保金 400 元 , 在质保的两年内两台空调共可免费维修 3 次 , 超过 3 次每次收取维修费 200 元 .

小李准备一次性购买两台这种空调 , 现需决策在购买时应购买哪种质保方案 , 为此搜集并整理了 100 台这种空调质保期内两年内维修的次数 , 统计得下表 :

维修次数	0	1	2	3
空调台数	20	30	30	20

用以上 100 台空调维修次数的频率代替一台机器维修次数发生的概率 .

(1) 求购买这样的两台空调在质保期的两年内维修次数超过 2 次的概率 ;

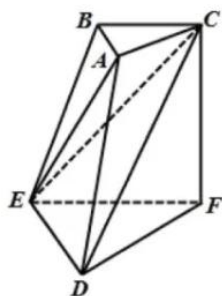
(2) 请问小李选择哪种质保方案更合算 .

20 . (12 分) 如图 , 在三棱台 $ABC-DEF$ 中 , $CF \perp$ 面 DEF , $AB \perp BC$,

$$AB = BC = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}CF = 2.$$

(1) 若 $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{BP}$, 证明 : 面 $PDF \perp$ 面 CDE

(2) 求二面角 $A-CE-D$ 的余弦值.



21 . (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b, 0 < b < 2)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上 , $PF_2 \perp F_1F_2$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6 , 面积为 $\frac{3}{2}$

圆上 , $PF_2 \perp F_1F_2$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6 , 面积为 $\frac{3}{2}$

(1) 求椭圆 C 的标准方程 ;

(2) 已知椭圆的左、右顶点分别为 A, B , 过 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 直线与椭圆交于 M, N 两点 , 设直线

AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明 : $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

22 . (12 分) 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = 2 + (\ln x)^2$.

(1) 证明 : 两函数图像有且只有一个公共点 ;

(2) 证明 : $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k+1}{k}} - \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{k+1}} > \ln(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.