

2021 届高三阶段性测试试卷

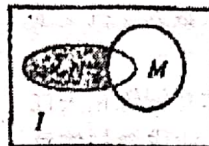
数学

2021.4

一、单项选择题：（每题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合 $M = \{x | y = \ln(2-x)\}$, $N = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$, 全集 $I = R$, 则图中阴影部分表示的集合 (▲)

- A. $[1, +\infty)$ B. $[1, 2)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$



2. 已知复数 $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+2i$ (i 为虚数单位), z_3 在复平面上对应的点分别为 A 、 B 、 C , 若四边形 $OABC$ 为平行四边形 (O 为复平面的坐标原点), 则复数 z_3 的模为 (▲)

- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{5}$ C. -5 D. -10

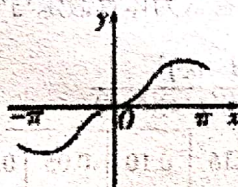
3. 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象大致如下, 则下列函数中哪个函数符合函数 $f(x)$ 图象特征 (▲)

A. $f(x) = \frac{x^2 + \cos x}{e^x + e^{-x}}$

B. $f(x) = \frac{x - \sin x}{e^x + e^{-x}}$

C. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}$

D. $f(x) = \frac{x + \sin x}{e^x - e^{-x}}$



(第3题)

4. 《周髀算经》中给出了：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二节气的日影长依次成等差数列的结论. 已知某地立春与立夏两个节气的日影长分别为 10.5 尺和 4.5 尺, 现在从该地日影长小于 9 尺的节气中随机抽取 2 个节气进行日影长情况统计, 则所选取这 2 个节气中至少有 1 个节气的日影长小于 5 尺的概率为 (▲)

A. $\frac{3}{7}$

B. $\frac{4}{7}$

C. $\frac{13}{21}$

D. $\frac{5}{7}$

5. $(1+x)^2(1-2x)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 a_3 的值为 (▲)

A. 10

B. 20

C. 24

D. 32

6. $4 \sin 40^\circ - \tan 40^\circ$ 的值为 (▲)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$



7. 《九章算术》是我国古代数学经典名著，堪与欧几里得《几何原本》相媲美的数学名著，在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为“鳖臑”。已知某鳖臑 $A-BCD$ 的外接球半径为 1，则该鳖臑 $A-BCD$ 的体积最大值为 (▲)

A. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

B. $\frac{4}{27}\sqrt{3}$

C. $\frac{9}{4}\sqrt{3}$

D. $\frac{3}{16}\sqrt{3}$

8. 已知抛物线 $y = x^2 + mx - 2$ 与 x 轴交于 A, B 两点，点 C 的坐标为 $(3, 1)$ ，圆 Q 过 A, B, C 三点，当实数 m 变化时，存在一条定直线 l 被圆 Q 截得的弦长为定值，则此定直线 l 方程为 (▲)

A. $x - 3y = 0$

B. $3x - y + 1 = 0$

C. $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$

D. $x - \sqrt{3}y = 0$

二、多选题：(选错不得分，漏选得 2 分，每题 5 分，共 20 分)

9. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 BB_1, DD_1 的中点，则下列结论中正确的是 (▲)

A. 平面 $A_1BD \perp$ 平面 A_1ACC_1

B. 直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角为 30°

C. 直线 A_1E 与直线 AC 所成角为 45°

D. 四棱锥 $A-A_1ECF$ 的体积为 $\frac{1}{3}$

10. 函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ，则下列结论正确的是 (▲)

A. 当 $x < 0$ 时， $f(x) = -\frac{x}{1+x}$

B. 关于 x 的不等式 $f(x) + f(2x-1) < 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{3})$

C. 关于 x 的方程 $f(x) = x$ 有三个实数解

D. $\forall x_1, x_2 \in R, |f(x_2) - f(x_1)| < 2$

11. 已知 $a > 0, b > 0$ ，下列说法成立的是 (▲)

A. $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

B. $[\ln(a+b)]^2 \geq \ln a \cdot \ln b$

C. 若 $b(a+b) = 4$ ，则 $a+5b \geq 8$

D. 存在 $a, b > 0$ 使得 $3\lg 2 \cdot \lg 12 > \lg(\frac{b}{a} + \frac{25a}{b})$

12. 随着高三毕业日期的逐渐临近，有 n ($n \geq 2$) 个同学组成的学习小组，每人写了一个祝福的卡片准备

送给其他同学，小组长收齐所有卡片后让每个人从中随机抽一张作为祝福卡片，则 (▲)

A. 当 $n=4$ 时，每个人抽到的卡片都不是自己的概率为 $\frac{3}{8}$

B. 当 $n=5$ 时，恰有一人抽到自己的卡片的概率为 $\frac{3}{40}$

C. 甲和乙恰好互换了卡片的概率为 $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

D. 记 n 个同学都拿到其他同学的卡片的抽法数为 a_n ，则 $a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1}), n \in N^*$



三、填空题：（每题 5 分，共 20 分）

13. $\triangle ABC$ 中， $AB=1, AC=\sqrt{3}, \angle B=120^\circ, \overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值为

14. 直线 $x=1$ 是函数 $f(x)=\sin(wx+\frac{\pi}{3})$ ($w>0$) 图像的一条对称轴，给出 w 的一个可能的值为

15. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线，两坐标轴是它的渐近线，那么 $y'=\frac{4}{x}$ 对应的双曲线的焦点坐标为

16. 法国著名的军事家拿破仑·波拿巴最早提出的一个几何定理：“以任意三角形的三条边为边向外构造三个等边三角形，则这三个三角形的外接圆圆心恰为另一个等边三角形的顶点”。在三角形 ABC 中，角 $A=60^\circ$ ，以 AB, BC, AC 为边向外作三个等边三角形，其外接圆圆心依次为 O_1, O_2, O_3 ，若三角形 $O_1O_2O_3$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则三角形 ABC 的周长最小值为

四、解答题：本大题共 6 小题，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 s_n ， $a_1=1$ ，对任意的 $n \in N^*$ 有 $a_n > 0$ ， $a_n = 2\sqrt{s_n} - 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ ， $b_1 = -\frac{5}{2}$ ， $\forall n \in N^*, 2^{n+1}(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式。

18. (本题满分 12 分) 在 ① $c(\cos A + \sin A) = b$ ，② $c \sin B + b \cos C = \sqrt{2}b$ ，

③ $\sin B + \tan C \cos B = \sqrt{2} \sin A$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并作答。

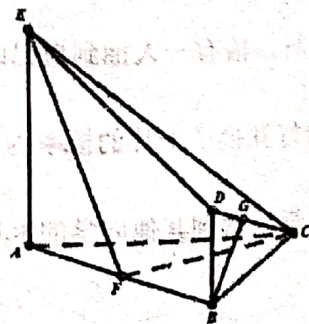
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c ，已知 ， $c = \sqrt{2}, \cos B = \frac{3}{5}$ 。

(1) 求 $\cos A$ 的值； (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

19. (本题满分 12 分) 如图，四棱锥 $C-ABDE$ 中， $AE \parallel BD, AE=2BD=2$ ，点 F 是 AB 的中点，点 G 在线段 DC 上，且 $2DG=GC$ 。

(1) 求证： $BG \parallel$ 平面 CEF ；

(2) 若 $AE \perp$ 平面 $ABC, AE=AB, AC=CB=\sqrt{2}$ ，求二面角 $F-EC-D$ 的正弦值。



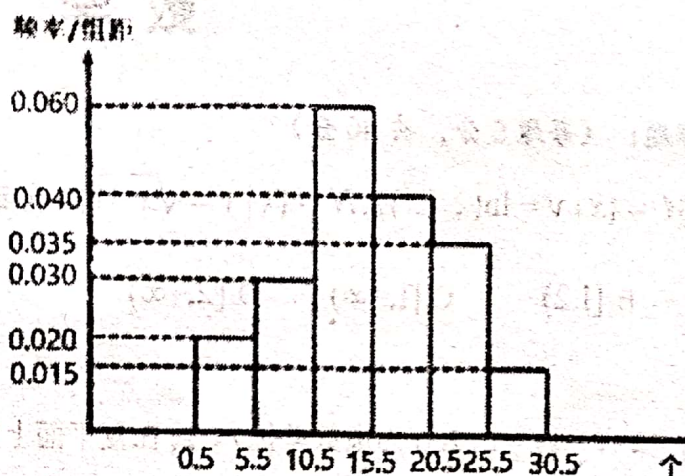
20. (本题满分 12 分) 今年两会期间国家对学生学业与未来发展以及身体素质的重要性的阐述引起了全社会的共鸣. 某大学学生发展中心对大一的 400 名男生做了单次引体向上的测试, 得到了如图所示的直方图(引体向上个数只记整数). 学生发展中心为进一步了解情况, 组织了两个研究小组.

(1) 第一小组决定从单次完成 1-15 个的引体向上男生中, 按照分层抽样抽取 11 人进行全面的体能测试,

① 单次完成 11-15 个引体向上的男生甲被抽到的概率是多少?

② 该小组又从这 11 人中抽取 3 人进行个别访谈, 记抽到“单次完成引体向上 1-5 个”的人数为随机变量 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 第二小组从学校学生的成绩与体育锻炼相关性角度进行研究, 得到了这 400 人的学业成绩与体育成绩之间的 2×2 列联表:



	学业优秀	学业不优秀	总计
体育成绩不优秀	100	200	300
体育成绩优秀	50	50	100
总计	150	250	400

请你根据联表判断是否有 99.5% 的把握认为体育锻炼与学业成绩有关?

参考公式及数据: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	0.46	0.71	1.32	2.07	2.71	3.84	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (本题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 在第一象限的点, F_1, F_2 为椭圆 C 的左右焦点, 点 P 关于原点的对称点为 Q .

(1) 设点 Q 到直线 PF_1, PF_2 的距离分别为 d_1, d_2 , 求 $\frac{d_1}{d_2}$ 取值范围;

(2) 已知椭圆在 $P(x_0, y_0)$ 处的切线 l 的方程为: $\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1$, 射线 QF_1 交 l 于点 R .

求证: $\angle F_1 R P = \angle R P F_1$.

22. (本题满分 12 分) 函数 $f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$, $g(x) = a(e^x - 1)$

(1) 当 $a < 0$ 时, 函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 有极值点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 对任意实数 $x \in [0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

