

2021届高三阶段性检测参考答案

数学 2021. 4

1.D 2.A 3.B 4.D 5.A 6.D 7.B 8.A 9.ABD 10.BD 11.AC 12.ACD

13. $\frac{4}{3}$ 14. $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{N}$ 15. $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 16. $3\sqrt{2}$

17.解: (1) $(a_n + 1)^2 = 4s_n$ ① $(a_{n+1} + 1)^2 = 4s_{n+1}$ ②

②-①得到 $(a_{n+1} + a_n + 2)(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1}$,2 分

所以 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n)$ $(a_{n+1} + a_n) = 2(a_{n+1} + a_n)$

因为 $a_{n+1} + a_n > 0$ 所以 $a_{n+1} - a_n = 2$ 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 又因为 $a_1 = 1$ 所以 $a_n = 2n - 1$ 5 分

(2) 因为 $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n+1}(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1}$ 所以 $b_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$

所以 $b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \dots + (b_3 - b_2) + (b_2 - b_1) + b_1$ 7 分

$= \frac{2n-1}{2^n} + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \dots + \frac{5}{2^3} + \frac{3}{2^2} - \frac{5}{2}$ ③

所以 $2b_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \frac{2n-3}{2^{n-2}} + \dots + \frac{5}{2^2} + \frac{3}{2^1} - 5$ ④8 分

所以④-③得到

$b_n = \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^{n-2}} + \dots + \frac{2}{2^2} - 1 - \frac{2n-1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-2}})}{1 - \frac{1}{2}} - 1 - \frac{2n-1}{2^n} = -\frac{2n+3}{2^n}$ 10 分

18.解: 选①设 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = t > 0$ 所以 $c = t \sin C, b = t \sin B$ 1 分

因为 $c(\cos A + \sin A) = b$, 得 $t \sin C(\cos A + \sin A) = t \sin B$,

得 $\sin C \cos A + \sin C \sin A = \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$

所以 $\sin A \sin C = \sin A \cos C$ 3 分

所以 $\tan C = 1$ 因为 $C \in (0, \pi)$ 所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 所以 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4 分

(1) 因为 $\cos B = \frac{3}{5}$ 所以 $\sin B = \frac{4}{5}$ 5 分

$$\cos A = -\cos(B+C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$
 7 分

(2) 因为 $A \in (0, \pi)$ 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ 8 分

因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 所以 $\frac{a}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$ 得 $a = \frac{7\sqrt{2}}{5}$ 10 分

$$s_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{25}$$
 12 分

选②设 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = t > 0$ 所以 $c = t \sin C, b = t \sin B$ 1 分

$$\text{因为 } c \sin B + b \cos C = \sqrt{2}b$$

$$\text{所以 } t \sin C \sin B + t \sin B \cos C = \sqrt{2}t \sin B \text{ 即 } \sin C + \cos C = \sqrt{2}$$
 3 分

$$\text{得 } \sqrt{2} \sin(C + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \text{ 所以 } \sin(C + \frac{\pi}{4}) = 1 \text{ 因为 } C \in (0, \pi) \therefore C = \frac{\pi}{4}$$
 4 分

下同 (1)

选③ $\sin B + \tan C \cos B = \sqrt{2} \sin A$ 则 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sqrt{2} \sin A \cos C$ 1 分

$$\text{所以 } \sin(B+C) = \sqrt{2} \sin A \cos C \text{ 即 } \sin(\pi - A) = \sin A = \sqrt{2} \sin A \cos C$$
 3 分

$$\sin A > 0 \text{ 所以 } \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 又因为 } C \in (0, \pi) \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{4}$$
 4 分

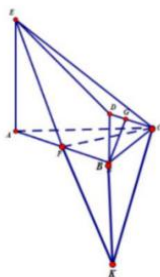
下同 (1)

19. 解: (1) 延长 EF, DB 交于点 K 连接 KC 2 分

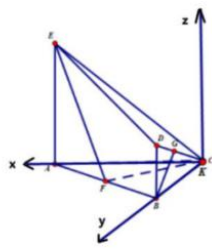
因为 $AE \parallel BD$, 所以 $AE \parallel BK$, 所以 $\frac{AE}{BK} = \frac{AF}{FB} = 1$ 3 分

$\frac{BD}{BK} = \frac{BD}{AE} = \frac{1}{2}$ 又因为 $2DG = GC$ 所以 $\frac{BD}{BF} = \frac{DG}{GC}$ 所以 $BG \parallel CK$ 4 分

又因为 $CK \subseteq \text{平面 } CEF$, 又因为 $BG \not\subset \text{平面 } CEF$, 所以 $BG \parallel \text{平面 } CEF$ 6 分



(2) 以 C 为原点, $\overrightarrow{CA}$ 为 x 轴的正方向, 以 $\overrightarrow{CB}$ 为 y 轴的正方向, 以过 C 点且垂直于面 ABC 为 z 轴的正方向, 建立如图所示的空间之间坐标系。.....7 分



$C(0,0,0), A(\sqrt{2},0,0), B(0,\sqrt{2},0), F(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0), E(\sqrt{2},0,2), D(0,\sqrt{2},1)$ 8 分

设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 ECF 的法向量; $\overrightarrow{CE} = (\sqrt{2}, 0, 2)$ $\overrightarrow{CF} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = \sqrt{2}x_1 + 2z_1 = 0$ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 = 0$, 取 $x_1 = 1$ 则

$y_1 = -1, z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 9 分

设 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 ECD 的法向量 ;

$\overrightarrow{CE} = (\sqrt{2}, 0, 2)$ $\overrightarrow{CD} = (0, \sqrt{2}, 1)$, $\vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CE} = \sqrt{2}x_2 + 2z_2 = 0$ $\vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CD} = \sqrt{2}y_2 + z_2 = 0$, 取 $x_2 = 1$ 则

$y_2 = 1, z_2 = -\sqrt{2}$ 10 分

$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, 设二面角 $F-EC-D$ 的平面角为 θ 则

所以 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle} = \frac{\sqrt{23}}{5}$ 12 分

20.解: (1) ① $0.02:0.03:0.06 = 2:3:6$ 1 分

所以 $\frac{2}{11} \times 11 = 2, \frac{3}{11} \times 11 = 3, \frac{6}{11} \times 11 = 6$, 即从 1-5 中选 2 个, 6-10 个中选 3 个, 11-15 个中选 6 个,2 分

又因为单次完成 11-15 个引体向上的人共有 $0.06 \times 5 \times 400 = 120$ 人,3 分

记“单次完成 11-15 个引体向上的甲被抽中”为事件 A , 则 $p(A) = \frac{C_{119}^5}{C_{120}^6} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$ 5 分

② X 的分布列如下:

X	0	1	2
P	$\frac{C_9^3}{C_{11}^3} = \frac{28}{55}$	$\frac{C_2^1 C_9^2}{C_{11}^3} = \frac{24}{55}$	$\frac{C_2^2 C_9^1}{C_{11}^3} = \frac{3}{55}$

所以 $E(X) = 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$ 8 分

(2) 因为 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{400(5000-10000)^2}{300 \times 100 \times 150 \times 250} = \frac{80}{9} = 8.889 > 7.879$ 10 分

所以有 99.5% 的把握认为体育锻炼与学业成绩有关。12 分

21. 解: 法一: (1) $\because s_{\Delta PQF_1} = s_{\Delta PQF_2} \therefore \frac{1}{2} PF_1 d_1 = \frac{1}{2} PF_2 d_2$ 2 分

$\therefore \frac{d_1}{d_2} = \frac{PF_2}{PF_1} = \frac{2a - PF_1}{PF_1} = \frac{4}{PF_1} - 1$ 3 分

又因为 $PF_1 = \sqrt{(x_0+1)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0+1)^2 + 3 - \frac{3}{4}x_0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 + 4} = \frac{1}{2}x_0 + 2$ 因为 $x_0 \in (0,2)$ 所以 $PF_1 \in (2,3)$, 所以 $\frac{d_1}{d_2} \in (\frac{1}{3}, 1)$ 5 分

法二: ① 当 $x_0 \neq 1$ 时, $k_{PF_2} = \frac{y_0}{x_0-1}$ 所以 $PF_2: y = \frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$ 即 $y_0x - (x_0-1)y - y_0 = 0$

$k_{PF_1} = \frac{y_0}{x_0+1}$ 所以 $PF_1: y = \frac{y_0}{x_0+1}(x+1)$ 即 $y_0x - (x_0+1)y + y_0 = 0$ 2 分

又所以 $d_1 = \frac{|y_0(-x_0) - (x_0+1)(-y_0) + y_0|}{\sqrt{y_0^2 + (x_0+1)^2}} = \frac{2y_0}{\sqrt{3 - \frac{3}{4}x_0^2 + (x_0+1)^2}} = \frac{2y_0}{\sqrt{(\frac{1}{2}x_0+2)^2}} = \frac{2y_0}{\frac{1}{2}x_0+2}$

$d_2 = \frac{|y_0(-x_0) - (x_0-1)(-y_0) - y_0|}{\sqrt{y_0^2 + (x_0-1)^2}} = \frac{2y_0}{\sqrt{3 - \frac{3}{4}x_0^2 + (x_0-1)^2}} = \frac{2y_0}{\sqrt{(\frac{1}{2}x_0-2)^2}} = \frac{2y_0}{2 - \frac{1}{2}x_0}$ 3 分

又所以 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{4-x_0}{4+x_0} = \frac{8}{4+x_0} - 1$ 因为 $x_0 \in (0,1) \cup (1,2)$ 所以 $\frac{d_1}{d_2} \in (\frac{1}{3}, \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{5}, 1)$ 4 分

当 $x_0 = 1$ 时可得 $P(1, \frac{3}{2}), Q(-1, -\frac{3}{2})$ $PF_1: y = \frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow 3x - 4y + 3 = 0$

$d_1 = \frac{6}{5}, d_2 = 2 \frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{5}$ 综上 $\frac{d_1}{d_2} \in (\frac{1}{3}, 1)$ 5 分

(2) 法一: 设直线 l 的倾斜角为 α , 设直线 F_1Q 的倾斜角为 β , 设直线 PF_1 的倾斜角为 γ
 则 $\angle F_1RP = \alpha - \beta$, $\angle RPF_1 = \gamma + \pi - \alpha$ 6 分
 所以

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k_l - k_{F_1Q}}{1 + k_l k_{F_1Q}} = \frac{-\frac{3x_0}{4y_0} - \frac{y_0}{x_0 - 1}}{1 - \frac{3x_0}{4(x_0 - 1)}} = -\frac{12 - 3x_0}{(x_0 - 4)y_0} = \frac{3}{y_0}$$

$$\tan(\gamma + \pi - \alpha) = \tan(\gamma - \alpha) = \frac{\tan \gamma - \tan \alpha}{1 + \tan \gamma \tan \alpha} = \frac{k_{PF_1} - k_l}{1 + k_{PF_1} k_l} = \frac{\frac{y_0}{x_0 + 1} - (-\frac{3x_0}{4y_0})}{1 - \frac{3x_0}{4(x_0 + 1)}} = \frac{12 + 3x_0}{(x_0 + 4)y_0} = \frac{3}{y_0}$$

.....10 分

$\therefore \tan \angle F_1RP = \tan \angle RPF_1$,11 分

又因为 $\angle F_1RP, \angle RPF_1 \in (0, \pi)$ 所以 $\angle F_1RP = \angle RPF_1$ 12 分

法二: 因为 $k_{F_1Q} = \frac{y_0}{x_0 - 1}$ 则 $F_1Q: y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x + 1)$ 6 分

$$\begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x + 1) \\ \frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_R = \frac{x_0^2 + 4x_0 - 8}{4 - x_0} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$RF_1 = \sqrt{1 + (\frac{y_0}{x_0 - 1})^2} |x_R + 1| = \sqrt{\frac{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}{(x_0 - 1)^2}} |x_R + 1| = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}x_0^2 - 2x_0 + 4}{(x_0 - 1)^2}} |x_R + 1| = \frac{|\frac{1}{2}x_0 - 2|}{|x_0 - 1|} |\frac{x_0^2 + 3x_0 - 4}{4 - x_0}|$$

$$= \frac{1}{2}(x_0 + 4) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$PF_1 = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + 3 - \frac{3}{4}x_0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 + 4} = \frac{1}{2}(x_0 + 4)$$

所以 $RF_1 = PF_1$ 所以 $\angle F_1RP = \angle RPF_1$ 12 分

22. 解: (1) $F(x) = \sin x(1 + \cos x) + a(e^x - 1)$

$$F'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) + ae^x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 + ae^x \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$F''(x) = 4\cos x(-\sin x) - \sin x + ae^x = -\sin x(4\cos x + 1) + ae^x, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 所以 $\sin x > 0, \cos x > 0$, 又 $a < 0$ 所以 $F''(x) < 0$ 3 分

所以 $F'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上递减, $F'(0) = 2 + a > 0$, $F'(\frac{\pi}{2}) = -1 + ae^{\frac{\pi}{2}} < 0$ 所以 $-2 < a < 0$ 4 分

(2) $G(x) = g(x) - f(x) = a(e^x - 1) - \sin x(1 + \cos x) \geq 0$.

因为 $F(\frac{\pi}{2}) \geq 0$ 所以 $a(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) - 1 \geq 0$ 所以 $a > 0$,5 分

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时 $G'(x) = g'(x) - f'(x) = ae^x - (2\cos^2 x + \cos x - 1)$

$G''(x) = g''(x) - f''(x) = ae^x + \sin x(4\cos x + 1) > 0$, 所以 $G'(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递增.....6 分

$G'(0) = a - 2$, $G'(\frac{\pi}{2}) = ae^{\frac{\pi}{2}} + 1 > 0$

①当 $G'(0) = a - 2 < 0$ 即 $a < 2$ 时, $\exists x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $G'(x_0) = 0$

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时 $G'(x) < 0$, 函数 $G(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 递减,7 分

又因为 $G(0) = 0$ 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时 $G(x) < 0$ 与条件 $G(x) \geq 0$ 矛盾.....8 分

② $G'(0) = a - 2 \geq 0$ 时, 即 $a \geq 2$ 时,

$G'(x) = ae^x - (2\cos^2 x + \cos x - 1) \geq 2e^x - (2\cos^2 x + \cos x - 1)$ 10 分

又因为 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2[\cos x + \frac{1}{4}]^2 - \frac{9}{8}$, $\cos x \in [-1, 1]$ 所以 $2\cos^2 x + \cos x - 1 \in [-\frac{9}{8}, 2]$

而 $x \geq 0$ 时 $2e^x \geq 2$, 所以 $G'(x) \geq 0$ 11 分

所以函数 $G(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增, 又因为 $G(0) = 0$ 所以 $G(x) \geq 0$

综上: $a \geq 2$ 12 分